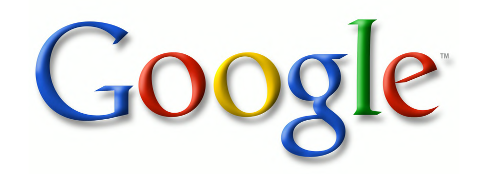


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/


KF
16461

NEDL TRANSFER
HN 5JTC J

HARVARD ENGINEERING SCHOOL

=16461

Transferred to Engin. Library



Harvard College Library

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,

AND HIS WIDOW,

ELIZA FARRAR,

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY."

26 Feb. 1902.

16 524

Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

Herausgegeben im Auftrage
der Akademieen der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,
sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen.

In 7 Bänden zu je etwa 40 Bogen. Jährlich 1 Band von 4—5 Heften. gr. 8. geh.

Band I: **Arithmetik u. Algebra**, redigiert v. **W. Fr. Meyer** in Königsberg.
— II: **Analysis** . . . . **H. Burkhardt** in Zürich.
— III: **Geometrie** . . . . **W. Fr. Meyer** in Königsberg.
— IV: **Mechanik** . . . . **F. Klein** in Göttingen.
— V: **Physik** . . . . **A. Sommerfeld** in Clausthal.
— VI, 1: **Geodäsie und Geophysik** . . . . **E. Wiechert** in Göttingen.
— VI, 2: **Astronomie** . . . . **H. Burkhardt** in Zürich.
— VII: Schlufsband, **historische, philosophische** und **didaktische** Fragen behandelnd, sowie **Generalregister** zu Band I—VI. Hrsg. von **W. Fr. Meyer** in Königsberg.

Bisher erschienen: Band I, 1. 1898. n. *M.* 3.40. I, 2. 1899. n. *M.* 3.40. I, 3. 1899. n. *M.* 3.80. I, 4. 1899. n. *M.* 4.80. II, 1. 1899. n. *M.* 4.80.

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Litteraturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, dafs sie einerseits den Mathematiker darüber orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen giebt. In sieben Bänden von zusammen etwa 280 Bogen sollen die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich geordneter Artikel behandelt werden; der letzte Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze mufs natürlich verzichtet werden.

Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sind so gehalten, dafs das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht.

Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren W. Dyck in München, G. v. Escherich in Wien, F. Klein in Göttingen, L. Boltzmann in Wien, H. Weber in Strafsburg, steht der Redaktion zur Seite.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Föppl, Dr. **A.**, Professor an der Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. I. Band: Einführung in die Mechanik. Mit 78 Figuren im Text. [XV u. 412 S.] gr. 8. 1898. In Leinw. geb. n. *M.* 10.—

—— —— II. Band: Graphische Statik. [Erscheint Ostern 1900.]

—— —— III. Band: Festigkeitslehre. Mit 70 Fig. im Text. [XVI u. 472 S.] gr. 8. 1897. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

—— —— IV. Band: Dynamik. Mit 69 Figuren im Text. [XIV u. 456 S.] gr. 8. 1899. In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

—— **Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vectorgrössen in der Physik. Mit Figuren im Texte.** [XVI u. 413 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 10.—

—— die Geometrie der Wirbelfelder. In Anlehnung an das Buch des Verfassers über die Maxwell'sche Theorie der Elektricität und zu dessen Ergänzung. [X u. 108 S.] gr. 8. 1897. geh. n. *M.* 3.60.

—— das Fachwerk im Raume. Mit zahlr. in den Text gedruckten Figuren und 2 lithogr. Tafeln. [VIII u. 156 S.] gr. 8. 1892. geh. n. *M.* 3.60.

—— Leitfaden und Aufgabensammlung für den Unterricht in der angewandten Mechanik. Mit zahlreichen Figuren im Texte. 2 Hefte. gr. 8. 1890. In Leinwand geb. n. *M.* 4.40.
Einzeln:
I. Heft. [IV u. 140 S.] n. *M.* 2.—; II. Heft. [VI u. 180 S.] n. *M.* 2.40.

Helm, Dr. Georg, Oberlehrer an der Annenrealschule zu Dresden, die Elemente der Mechanik und mathematischen Physik. Ein Lehr- und Übungsbuch für höhere Schulen. Mit Figuren im Text. [IV u. 222 S.] gr. 8. 1884. geh. n. *M.* 3.60.

Henrici, Julius, Prof. am Gymn. in Heidelberg, Elementar-Mechanik des Punktes und des starren Systemes. Mit 159 in den Text gedr. Holzschn. [VI u. 186 S.] gr. 8. 1869. geh. n. *M.* 2.40.

Holzmüller, Dr. **Gustav**, Direktor der Kgl. Gewerbeschule zu Hagen, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik. Mit 26 lithographierten Tafeln. [VIII u. 284 S.] gr. 8. 1882. geh. n. *M.* 11.20.

—— Einführung in das stereometrische Zeichnen. Mit Berücksichtigung der Krystallographie und Kartographie. Mit 16 lithogr. Tafeln. [VI u. 102 S.] 1886. gr. 8. kart. n. *M.* 4.40.

[Fortsetzung am Ende des Buches.

VORLESUNGEN

UEBER

TECHNISCHE MECHANIK

VON

DR. AUG. FÖPPL

PROF. A. D. TECHN. HOCHSCHULE IN MÜNCHEN

ERSTER BAND

EINFUEHRUNG IN DIE MECHANIK

MIT 96 FIGUREN IM TEXT

ZWEITE AUFLAGE



LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1900

F16461

405.36

HARVARD COLLEGE
FEB 26 1902
LIBRARY.

Farrar fund.
(4 vol.)

QA
865.5
17
V1.2

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES UEBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Aus dem Vorworte zur ersten Auflage.

Der in diesem Bande behandelte Stoff ist zur Einführung der im zweiten Studiensemester stehenden Hörer in das Gebiet der technischen Mechanik bestimmt. Er erstreckt sich auf die wichtigsten grundlegenden Begriffe, auf die sich an diese unmittelbar anschliessenden Sätze und auf eine Reihe der einfacheren Anwendungen, darunter auch auf solche, die in den späteren Bänden ausführlicher behandelt werden sollen.

Es mag vielleicht sein, dass ich ängstlicher, als grade nöthig gewesen wäre, in diesem ersten Theile auf die Vermeidung aller verwickelteren Betrachtungen bedacht gewesen bin. Gelegentliche Aeusserungen meiner Hörer lassen wenigstens darauf schliessen, dass ich nach deren Ansicht bei der Einführung in die Mechanik eher zu langsam als zu schnell vorangehe. Man muss aber bedenken, wie wichtig es ist, den Lehren, mit denen die Mechanik beginnt, eine eingehende und sorgfältige Besprechung zu Theil werden zu lassen, um dadurch eine nach allen Seiten hin gefestigte Grundlage für den weiteren Aufbau zu gewinnen. Diese Rücksicht verbietet es, über manche Dinge, von denen sich freilich annehmen lässt, dass sie den Hörern der Vorlesung schon ziemlich gut bekannt sind, allzuschnell hinwegzugehen. Auch dem Leser dieses Buches, der sich in die Mechanik einzuarbeiten wünscht, möchte ich daher sehr empfehlen, auch solche Ausführungen, die ihm auf den ersten Blick vielleicht entbehrlich erscheinen, weil er über den Gegenstand bereits hinreichend unterrichtet zu sein glaubt, immerhin mit aller Aufmerksamkeit durch-

zulesen. In der Regel dürfte er sich dabei noch über manchen Umstand klar werden, der hier in Erwägung gezogen ist, während er ihm bis dahin entgangen war. Später wird sich diese Mühe reichlich lohnen, denn von den Schwierigkeiten, die sich dem Eindringen in die höheren Theile der Mechanik entgegen zu stellen pflegen, sind wohl die meisten darauf zurückzuführen, dass der Leser an den Gegenstand herantritt, bevor er die Elemente genügend beherrscht. Je genauer man sich mit diesen bekannt macht, um so besser ist man auf das Studium der schwierigeren Probleme vorbereitet. Es schadet auch jedenfalls nicht gar zu viel, wenn man wirklich einmal einer zur vollständigen Darstellung des ganzen Systems gehörigen Auseinandersetzung gefolgt ist, ohne dabei irgend etwas Neues erfahren zu haben. Viel grösser wäre dagegen der Schaden, wenn man im trügerischen Vertrauen auf vermeintlich ausreichende Vorkenntnisse flüchtig über einen wichtigen Gegenstand hinwegeilte und darüber einer Bemerkung verlustig ginge, die für das Verständniss späterer Untersuchungen von Bedeutung ist.

Die Mechanik macht ausgiebigen Gebrauch von den Hülfsmitteln der Mathematik. Bei aller Anerkennung dieser schätzenswerthen Dienste darf man aber darum die Rolle, die die Mathematik in der Mechanik spielt, auch nicht überschätzen oder gar das mathematische Gewand, in das die Lehren der Mechanik gekleidet sind, als die Hauptsache betrachten. Je weniger Rechnung für die Lösung einer Aufgabe der Mechanik aufgewendet zu werden braucht, desto besser ist diese Lösung vielmehr. Durch die Vermeidung von entbehrlichem Rechenbeiwerke erreicht man nämlich, dass die Aufmerksamkeit vorwiegend den concreten Vorgängen, auf deren Untersuchung es ankommt, zugewendet bleibt und dass sie nicht durch die formalen Rechenoperationen abgelenkt wird. Für einen Meister, der den Gegenstand bereits vollständig beherrscht, ist diese Gefahr freilich auch bei einer langathmigen Darstellung kaum zu befürchten, um so mehr aber für den Anfänger.

Hierbei kommt namentlich in Betracht, dass die mathematischen Lehren, so wie sie heute überall vorgetragen werden, in eine Form gegossen sind, die ihrer unmittelbaren Anwendung in der Mechanik nicht besonders günstig ist. In der Mechanik und überhaupt in der theoretischen Physik handelt es sich vorwiegend um die Untersuchung gerichteter Grössen. Für einen solchen Gebrauch ist aber, wie man bei aller Hochachtung für die Leistungen der heutigen Mathematik betonen muss, der allgemein eingeführte Lehrvortrag wenig angepasst. Algebra und Analysis beschäftigen sich nur mit den Beziehungen zwischen Grössen ohne Richtung; die bekannte geometrische Deutung der complexen Grössen, die scheinbar eine Ausnahme macht, hat dem Zwecke, um den es sich hier handelt, in der That mehr geschadet, als genützt. In der analytischen Geometrie wird allerdings gezeigt, wie man mit Hülfe der Coordinatenmethode auch gerichtete Grössen der Rechnung unterwerfen kann; das Auskunftsmittel, dessen man sich hierbei bedient, nöthigt aber zu einer weitschweifigen Darstellung, die der klaren Auffassung der Sache wenig förderlich ist. Die neuere synthetische Geometrie endlich nähert sich zwar wegen der Vermeidung eines Coordinatensystems erheblich den Bedürfnissen der Mechanik, und sie ist darum vor einem Menschenalter namentlich auch von Vertretern der technischen Mechanik mit lebhafter Freude aufgenommen worden. Andererseits beschäftigt sie sich aber so überwiegend mit den rein projectivischen Beziehungen, dass sie zur Untersuchung der gerichteten Grössen längst nicht auszureichen vermag.

Gesunde Anläufe zur Verbesserung der für den Gebrauch in der Mechanik bestimmten mathematischen Hülfsmittel sind nun freilich von einzelnen hervorragenden Mathematikern schon längst gemacht worden. Vorläufig reichen sie aber noch nicht besonders weit und leider sind sie bisher auch nur von geringem Einflusse auf die Gestaltung der herrschenden mathematischen Lehre geblieben. Man darf wohl hoffen, dass die Zukunft bringen wird, was hierin bisher versäumt wurde; manche Anzeichen scheinen darauf hinzudeuten. Einstweilen

muss man aber mit dem auszukommen suchen, was uns heute an mathematischen Hülfsmitteln geboten wird.

Hiermit soll aber nicht gesagt sein, dass die Mechanik nun auch ihrerseits willenlos an die in der reinen Mathematik üblichen Darstellungsformen gebunden sei. Es muss ihr vielmehr die Freiheit gewahrt werden, sich nach Möglichkeit der ihren Zwecken am besten angepassten Ausdrucksweisen zu bedienen. In der That tritt auch bei den neueren Bearbeitungen der Mechanik der Begriff der gerichteten Grösse oder des Vectors allmählich immer mehr in den Vordergrund, und zwar auch in solchen Arbeiten, die bei den Ausrechnungen den Vector noch überall in seine Componenten zerlegen. Ich selbst habe mich schon seit langer Zeit dazu entschlossen, so weit es angesichts der mathematischen Vorkenntnisse, die man voraussetzen darf, zulässig ist, überall mit den Vectoren selbst zu rechnen. Vor Allem kann die Mechanik ohne erhebliche Einbusse an Klarheit und Uebersichtlichkeit nicht auf den Begriff der geometrischen Summe zweier gerichteter Grössen verzichten. Das ist heute wohl allgemein anerkannt. Man darf aber dabei nicht stehen bleiben: auch die beiden Arten des geometrischen Products sind in so enger Weise mit den Hauptbegriffen der Mechanik verbunden, dass ihre Einführung dringend geboten erscheint. Mit diesen drei Begriffen der Vector-Algebra rechne ich in meinen Vorlesungen, und ich kann es, ohne voraussetzen zu müssen, dass der Hörer oder der Leser auf ihren Gebrauch schon vorbereitet sei. Die Mechanik führt vielmehr von selbst mit Nothwendigkeit auf sie hin und es bleibt nur übrig, für das, was ohnehin erörtert werden muss, eine bestimmte einfache Bezeichnung einzuführen. So führt die Zusammensetzung der Kräfte von selbst zum Begriffe der geometrischen Summe, die Arbeit und das statische Moment führen zu den beiden geometrischen Producten und das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten und der Momentensatz stellen sich von selbst als Multiplicationssätze heraus. Auf die „heteraptische" Summe nach der Bezeichnung des Herrn Budde und auf die Raumdifferentiationen

der Vector-Analysis gehe ich dagegen nicht ein; von diesen letzten mache ich nur in einer Vorlesung, die ich ab und zu über die Theorie der Elektricität abzuhalten pflege, Gebrauch.

Wie in den anderen Bänden habe ich auch in diesem zur weiteren Ergänzung Einiges zugefügt, was in der Vorlesung selbst aus Mangel an Zeit nicht besprochen werden kann.

Der mit der Mechanik vorher schon gut vertraute Leser darf in diesem ersten Bande, der sich mit den einfachsten und seit langer Zeit untersuchten Erscheinungen beschäftigt, natürlich sachlich nicht viel Neues erwarten. Ich hoffe aber, dass die Art der Darstellung meiner Arbeit eine freundliche Beachtung auch bei ihm sichern wird.

München, im Juni 1898.

A. Föppl.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Wenig mehr als ein Jahr ist verflossen, seit ich die Bearbeitung der ersten Auflage dieses Buches mit der Abfassung des Vorwortes beendigte. Zu eingreifenden Aenderungen beim Neudrucke hatte ich nach so kurzer Frist keine Veranlassung. Ausserdem drängte auch die Arbeit so sehr, dass ich schon aus diesem Grunde von einer vollständigen Neubearbeitung absehen musste. Die Aenderungen beschränken sich daher im Wesentlichen auf einige kleinere Zusätze, von denen vielleicht nur die neue Fassung einiger Absätze in § 54, zu der ich durch Einwände eines meiner Herren Kritiker veranlasst wurde, eine gewisse Beachtung verdient.

Ausserdem habe ich 18 neue Figuren beigegeben. Gegenüber anderen Büchern dieser Art ist freilich auch jetzt die

Zahl der Figuren noch ziemlich gering. Ich glaubte aber darin nicht weiter gehen zu sollen, weil man von dem Leser, der zur Beherrschung des ganzen Stoffes gelangen will, ohnehin eine solche Uebung des Vorstellungsvermögens voraussetzen muss, dass er auch ohne besondere Zeichnung den Ausführungen zu folgen vermag.

Für das freundliche Interesse, das man von so vielen Seiten her meiner Arbeit entgegenbrachte und das auch in dem ganz unerwartet schnellen Absatze der ersten Auflage zum Ausdrucke kam, spreche ich meinen besten Dank aus. Ich erblicke darin einen mir sehr erfreulichen Beweis, dass die Auffassung, von der ich mich bei der Bearbeitung der Mechanik leiten liess, in weiten Kreisen gebilligt wird. Möge das Buch dazu beitragen, dieser Auffassung auch weiterhin neue Freunde zu gewinnen.

München, im October 1899.

A. Föppl.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Ursprung und Ziel der Mechanik.

Die Mechanik ist ein Theil der Physik. Ihre Lehren beruhen wie die aller anderen Naturwissenschaften in letzter Linie auf der Erfahrung. Unsere Aufgabe besteht aber jetzt nicht darin, alle Beobachtungen, die durch die planmässige Anstellung von Versuchen gewonnen werden können und die ursprünglich zum Aufbaue der Mechanik verwendet wurden, hier im Einzelnen vorzuführen. Das ist vielmehr die Aufgabe der Experimentalphysik und vom Hörer dieser Vorlesungen oder vom Leser dieses Buches wird vorausgesetzt, dass er mit den einschlägigen Lehren der Experimentalphysik bereits vertraut sei.

Um recht zu verstehen, was die Mechanik will und welche Stellung sie den Erfahrungsthatsachen gegenüber einnimmt, wollen wir uns zunächst überlegen, auf welche Weise das überhaupt gewonnen wird, was man in der Umgangssprache als „Erfahrung" bezeichnet. Mancher sieht viel in seinem Leben und weiss daraus doch keine Erfahrungen im eigentlichen Sinne des Wortes, nämlich keine nutzbaren Erfahrungen zu sammeln. Dazu gehört, dass man sich nicht damit begnüge, sich die Erscheinungen, die man gewahr wird, im Einzelnen zu merken, sondern dass man den Umständen nachforsche, unter denen diese Erscheinungen eintreten und dass man unterscheiden lerne, welche dieser Umstände wesentlich für den Erfolg und welche nur zufällig sind. Wer jahraus

jahrein in einem engbegrenzten Wirkungskreise thätig ist, vermag wohl auch ohne besondere Schulung mit der Zeit nutzbare und geordnete Erfahrungen zu sammeln, die ihn befähigen, den Erfolg seiner Thätigkeit mit hinreichender Sicherheit vorauszusehen. Dies wird aber um so schwieriger, je vielgestaltiger die Aufgaben sind, die an ihn herantreten und je verwickelter die Bedingungen sind, denen diese Aufgaben unterworfen werden.

Ein Praktiker, etwa ein tüchtiger Werkführer, der in diese Lage versetzt wird und sich seiner Aufgabe gewachsen zeigt, schlägt dann regelmässig ganz von selbst denselben Weg ein, auf dem auch unsere heutige Mechanik zur Entwickelung gelangt ist. Aus dem ihm vorliegenden Beobachtungsmaterial, das er nach Möglichkeit durch geeignete Versuche zu ergänzen sucht, schliesst er vor allem darauf, welche Umstände von ausschlaggebender Bedeutung sind, er überzeugt sich davon, ob diese Umstände den Erfolg immer in derselben Weise bedingen und nennt sie, wenn dies zutrifft, die Ursachen der Erscheinung. Sobald er zu dieser Stufe gelangt ist, befindet er sich im Besitze einer Theorie des Vorgangs. Nur selten wird es ihm freilich möglich sein, blos aus eigenen Kräften ohne fremde Beihilfe zu einer wohlgeordneten Darstellung des ganzen ihn interessirenden Beobachtungsmaterials zu gelangen; er wird in seine Auffassung zum mindesten das verflechten, was er von Mitarbeitern oder Fachgenossen über denselben Gegenstand erfuhr. Immer wird er freilich von seinem Wissen das am höchsten schätzen und ihm am meisten vertrauen, was sich bei seinen eigenen Arbeiten schon augenscheinlich bewährt hat. So mag er zunächst vielleicht nur vermuthen, dass ein gewisser Zusammenhang bestehen könne und daraus den Schluss ziehen, dass unter geeigneten Bedingungen ein bestimmter Erfolg zu erwarten sei, wenn die Vermuthung richtig war. Falls aber nachher die Probe, zu der er sich dadurch ermuthigt fühlt, seine Erwartung bestätigt, wird er die vorher zweifelhafte Vermuthung in den Schatz seines theoretischen Wissens aufnehmen.

Wenn derselbe Praktiker nachher erklärt, dass Probiren über Studiren gehe, darf man ihm dies nicht übel nehmen. Er sagt es nur, weil er nicht weiss, dass ein Probiren solcher Art die vornehmste Art des Studirens, dass es nämlich ächtes Forschen nach wissenschaftlicher Methode ist. Er weiss auch kaum, dass die Grundsätze, von denen er sich leiten lässt, in ihrem Zusammenhange eine zum Theile selbst geschaffene, zum Theile von anderen übernommene Theorie bilden, die sich von den Theorien der Gelehrten nicht dem Wesen, sondern nur dem Grade nach unterscheidet.

Ein einzelner Mensch, der auf sich selbst gestellt wäre, müsste den zahllosen Räthseln, die ihm das Geschehen in der Natur aufgibt, ohnmächtig gegenüber stehen. Auch der Begabteste, selbst ein Galilei oder Newton vermöchte nur gar wenig auszurichten, wenn er ausschliesslich auf die Verarbeitung seiner eigenen Beobachtungen angewiesen wäre und sich nicht zugleich auch den Erfahrungsschatz anderer und namentlich den von vergangenen Geschlechtern her ererbten in bereits geordnet vorliegender Form nutzbar machen könnte. Und darin besteht namentlich der Gradunterschied zwischen den Theorien der Wissenschaft und den theoretischen Anschauungen, die sich der reine Praktiker bewusst oder unbewusst zurechtlegt, dass jene den Wissensschatz, den wir den Arbeiten der Forscher aller Zeiten verdanken, in möglichst wohlgeordneter Form zusammenzufassen suchen. Je mehr sich der Stoff im Ganzen durch die unablässige Arbeit häuft, desto mehr wird es nöthig, nach leitenden Gedanken zu suchen, durch die die Uebersichtlichkeit erhöht wird und die es uns ersparen, viele Einzelheiten gesondert im Gedächtnisse festzuhalten.

Freilich besteht bei dieser Art des Studiums, wenn es sich ausschliesslich auf die uns überkommenen Erfahrungen richtet, leicht die Gefahr, dass der unmittelbare Vergleich der theoretischen Anschauungen mit den Thatsachen der Wirklichkeit ungebührlich vernachlässigt wird. Es ist gewiss nicht nöthig und auch nicht möglich, dass jeder Einzelne alle Er-

fahrungen, die uns überliefert sind, durch eigene Beobachtungen nachprüft. Aber immer dann, wenn ihm zweifelhaft wird, ob gewisse Sätze richtig sind, oder wenn er selbst neue Schlüsse zog — sei es auch auf dem besterprobten Wege —, soll er jede Gelegenheit, die sich ihm darbietet, zu einem Vergleiche seiner Resultate mit den Erscheinungen der Wirklichkeit benutzen. In diesem Sinne muss auch dem wissenschaftlich Gebildeten das Probiren die oberste Art des Studirens sein.

Was sich in der Mechanik bisher als ein gesicherter wissenschaftlicher Besitzstand bewährt hat, ist auf diese Art gewonnen worden. Man muss sich dies wohl vor Augen halten, wenn man die Zuversicht wahrnimmt, mit der in gar vielen Fällen auf die Richtigkeit der gezogenen Schlüsse vertraut werden darf. Wen hätte es nicht schon einmal gewundert, dass die Vorausberechnungen der Astronomen immer so gut eintreffen, dass Niemand mehr daran zu zweifeln wagt, dass sich z. B. eine vorausgesagte Mondfinsterniss auch wirklich zur angegebenen Zeit einstellt? Auf anderen Gebieten ist die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Wirklichkeit freilich oft viel mangelhafter, aber auch hier gewöhnlich nur insoweit, als die Theorie des Vorgangs ausdrücklich von der Berücksichtigung aller Nebenumstände absah.

Daher drängt sich immer wieder von Neuem die Frage auf, woher diese enge Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Naturgeschehen kommt: wie es überhaupt möglich ist, durch logisches Schliessen den Ablauf eines Naturereignisses vorauszusehen. Woher kommt das Band, das die Gesetze unseres Denkens mit den Gesetzen der ausser uns stehenden Wirklichkeit in so enger Weise verknüpft, dass beide zu gleichen Ergebnissen führen? Das ist nun freilich keine Frage der Mechanik mehr, sondern eine philosophische, eine erkenntnisstheoretische Frage. Ihre Erörterung kann indessen bei der Einleitung in die Mechanik nicht wohl umgangen werden, so sehr man sich auf Grund von früheren ungünstigen Erfahrungen sonst auch scheut, philosophische Fragen in den exakten Wissenschaften zu berühren. Hier würde aber ohne

eine bestimmte Stellungnahme dazu die Gefahr der Verleitung zu einer abergläubischen Auffassung des Zweckes und des Könnens der Mechanik bei Gemüthern, die dazu neigen, nur zu nahe liegen.

Die Antwort auf diese Frage ist schon durch die vorausgehenden Erörterungen nahe gelegt. Der menschliche Geist ist gar vieler Ideenverbindungen fähig und in den zurückliegenden Jahrhunderten hat man schon eine recht stattliche Anzahl davon auf ihre Bewährung geprüft. Jene, die sich mit dem wirklichen Geschehen nicht zur Deckung bringen liessen, hat man schliesslich als Irrthümer, freilich oft erst nach langem hartnäckigem Widerstreben der Anhänger der alten Lehre, verworfen und die anderen, die das leisteten, was man von ihnen verlangte, haben sich von Geschlecht zu Geschlecht fortgeerbt. Nicht immer übrigens sind es Irrthümer im eigentlichen Sinne des Wortes gewesen, die man aus der herrschenden Lehre entfernte: oft genug wurde eine Lehre, die sich sonst ganz wohl bewährt hatte, nur deshalb verlassen, weil eine andere aufstand, die noch mehr leistete, als sie, indem sie entweder alle Einzelheiten genauer kennen lehrte oder einen grösseren Kreis von Thatsachen umspannte, als die alte Theorie, die ihr weichen musste. Dieser Process des Anpassens unserer Vorstellungen und unseres Denkens an das ausser uns liegende Geschehen dauert noch jetzt mit ungeschwächter Kraft fort und er wird nicht ruhen, solange es selbständige Denker gibt. In der That gibt es auch heute noch Gebiete genug, auf denen es an jeder befriedigenden Theorie, also an jeder genauen Darstellung der bestimmenden Umstände und der Ergebnisse ihres Zusammenwirkens fehlt und auf denen daher die Anschauungen in raschem, oft sprungweisem Wechsel begriffen sind. Wir selbst sind Zeugen davon, wie in solchen Wissenszweigen alle möglichen Auffassungen auf ihren Werth geprüft werden und wie immer wieder nach neuen gesucht wird, in der Hoffnung, schliesslich eine aufzufinden, die zu der ersehnten Uebereinstimmung zwischen dem, was wir nachher als denknothwendig empfinden und dem wirk-

lichen Geschehen führt. Auch die wissenschaftlichen Lehren kämpfen mit einander den Kampf ums Dasein und nur jene, die ihn bestehen, bleiben erhalten.

Man braucht die vorausgehenden Sätze nicht ausschliesslich auf die Naturwissenschaften zu beziehen; sie behalten auch anderwärts ihre Gültigkeit. Jedenfalls war es aber unter den Naturwissenschaften zuerst die Mechanik, die zu einer Fassung gelangte, die alles leistete, was man von einer guten Theorie verlangen kann. Dieses ganze Jahrhundert, wissenschaftlich so reg wie kaum ein anderes vor ihm, an dessen Ende wir jetzt stehen, hat an den Grundlagen des theoretischen Lehrgebäudes der Mechanik, wie es ihm vermacht wurde, nur gar wenig mäkeln oder bessern können. Alles, was in diesem langen Zeitraume von unzähligen, emsigen Forschern beobachtet und gefunden wurde, hat vielmehr nur dazu dienen können, die glückliche Fassung, die unsere Voreltern der Mechanik gegeben haben, aufs Neue zu bestätigen. Dass von den Einzelausführungen manches ergänzt und berichtigt werden musste, ist selbstverständlich; an der wichtigen Thatsache vermag dies aber nichts zu ändern, dass das System der Mechanik, wie es aus den Arbeiten von Galilei, Newton, d'Alembert hervorging, seinem Zwecke auch heute noch unverändert entspricht. Dadurch ist die Mechanik zum Vorbilde für die anderen Naturwissenschaften geworden. Diese setzen es sich zum höchsten Ziele, ihren Stoff entweder unmittelbar in die Mechanik einzugliedern oder doch eine Darstellung ihrer Lehre zu finden, die ebenso gut in Uebereinstimmung mit den Thatsachen stehe und sich ebenso umfassend bewähre, als das Lehrsystem der Mechanik, das von allen als das Muster einer vollendeten Wissenschaft anerkannt wird.

Angesichts dieses Werdegangs der Mechanik kann man wohl kaum im Zweifel darüber sein, wie die Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung zu Stande kam. Viel weniger so, als wenn es dem menschlichen Geiste vermöge der ihm angeborenen Fähigkeiten schliesslich gelungen wäre, die Räthsel der Natur zu enthüllen oder sie zu entdecken, sondern weit

mehr dadurch, dass der Mensch seine Gedanken allmählich so ordnen und sie so zu verwerthen lernte, wie es nöthig war, um die Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit herzustellen. Es entspricht nur wenig dem wahren Sachverhalte, wenn man sagt, dass der menschliche Geist die Natur bezwungen oder ihre Geheimnisse für sich erobert habe. Weit eher war das Gegentheil der Fall: das beständige Geschehen nach festen Regeln in der Natur hat den menschlichen Geist — ich will nicht gerade sagen erobert, aber doch — gelenkt, ihn gedrängt und genöthigt, bis er zur Aufnahme eines Abbildes der Aussenwelt tauglich wurde.

Wer dieser Anschauung zustimmt — und es scheint, dass sie heute von den führenden Geistern der Naturforschung allgemein getheilt wird —, dem kann die Uebereinstimmung zwischen unseren Rechnungsergebnissen und den Vorgängen in der Aussenwelt nicht mehr unverständlich sein. Auch praktisch hat übrigens diese Ueberzeugung heute schon ihre Wirkungen geübt. Man ist sehr misstrauisch geworden gegen voreilige Uebertragungen der mechanischen Gesetze auf unendlich grosse Welträume oder auf unendlich ferne Zeiten. So nahe auch manche Schlüsse dieser Art liegen, können sie doch nur als Vermuthungen gelten, denn nach der Art, wie unsere Kenntniss der Mechanik entstand, dürfen wir nur jene ihrer Folgerungen als zuverlässig betrachten, die sich auf wirklich erreichbare oder beobachtbare Vorgänge beziehen. Die Zeiten, in der die Fabel von der Laplace'schen Weltformel als bewiesene Wahrheit ausgegeben werden konnte — die Zeiten des „krassen Materialismus“ — sind vorüber.

Von Anbeginn der wissenschaftlichen Entwickelung an schien freilich eine ganz andere Möglichkeit offen zu stehen, dem inneren Zusammenhange der Naturthatsachen auf die Spur zu kommen. Die Vermuthung lag nahe genug, dass es im ersten Plane der Weltenschöpfung gelegen haben könne, den menschlichen Geist und den Zusammenhang der Dinge in der Aussenwelt nach genau gleichen Grundsätzen einzurichten, derart, dass von vornherein des gleichen Ursprungs wegen

ein innerer Zusammenhang zwischen den Gesetzen des Vernunftgebrauchs und den Naturgesetzen bestanden hätte. Von solchen Vorstellungen liessen sich die griechischen Forscher und viele nach ihnen vorwiegend leiten. Wenn die Vermuthung richtig war, musste es möglich sein, durch reines Denken, unbeeinflusst von den aus der Aussenwelt an den Menschen herantretenden Erfahrungen, die Gesetze dieser Aussenwelt zu erforschen. Es war die Aussicht geboten, aus den Keimen, die im menschlichen Geiste a priori gegeben waren, blos durch consequentes Schliessen das ganze System aller Wissenschaften und daher auch der Naturwissenschaften abzuleiten. Das war die grossartigste Aussicht, die sich jemals dem menschlichen Forschungsdrange dargeboten hatte und so lange sie noch irgendwie begründet erschien, vermochten sich ihrem verlockenden Zauber die nach Aufklärung schmachtenden Geister nicht zu entziehen. Dieser grossartige Versuch ist freilich immer wieder fehlgeschlagen: nur kleine Bruchstücke sind von den grossen griechischen Denkern zu dem Wissensschatze unserer heutigen Mechanik beigetragen worden und auch diese stammen keineswegs aus dem reinen Vernunftgebrauche, sondern aus gut gesehenen Beobachtungen, also aus derselben Erkenntnissquelle her, aus der sich später die ganze Mechanik entwickelt hat. Trotzdem war aber der Versuch nicht werthlos und wir dürfen aus seinem Misslingen keinen Vorwurf gegen die griechischen Philosophen ableiten. Der Versuch musste einmal gemacht werden: und erst nachdem sich nach langem, heissem Bemühen gezeigt hatte, dass man auf diesem Wege nicht zum Ziele gelangen konnte, war der Weg, den man weiterhin einschlagen musste, richtig vorgezeichnet. So hat auch der misslungene Versuch trotz aller Enttäuschungen, die er brachte, dazu beigetragen, die Wissenschaft schliesslich mächtig zu fördern.

Auf einem Felde freilich, das mit der Mechanik ganz nahe verwandt ist, haben die griechischen Philosophen ganz erhebliche Erfolge erzielt, nämlich auf dem Gebiete der Geometrie. So wie wir hoffen dürfen, dass die Grundlagen unserer

heutigen Mechanik noch Jahrtausende unangefochten überdauern werden, sind die geometrischen Sätze, die sie fanden, bis auf unsere Tage im Wesentlichen ohne Anfechtung geblieben. Wir dürfen aber daraus nur schliessen, dass die Griechen auf Grund der Arbeiten ihrer Vorgänger bereits im Besitze von Raumvorstellungen waren, die den Eigenschaften des Raumes, in dem wir leben, richtig nachgebildet waren. Es liegt ja auch auf der Hand, dass die erste Aufgabe, die der Erkenntnissthätigkeit des Menschen gegenüber treten musste, darin bestand, sich im Raume zurechtzufinden. Erst nachdem nach dieser Richtung hin schon erhebliche Erfolge erzielt waren, konnte man überhaupt daran gehen, das Verhalten der greifbaren Körper in diesem Raume näher zu untersuchen. So ist auf die endgültige Fassung der geometrischen Begriffe, freilich erst nach langer Pause, die endgültige Fassung der grundlegenden Begriffe der Mechanik gefolgt. Und eben jetzt bemühen sich die Naturforscher mit der Aufrichtung ähnlicher Systeme für die übrigen Zweige der Physik. Wie weit man damit etwa auf dem Gebiete der elektromagnetischen Erscheinungen heute bereits gelangt ist, vermag kein Lebender zu sagen. Darüber werden erst spätere Geschlechter zu urtheilen berufen sein.

Auf ganz anderem Wege freilich, als die alten Philosophen sich dies dachten, sind wir nun selbst doch in den Besitz eines wissenschaftlichen Systems der Mechanik gelangt, das fast allen Ansprüchen genügt, die jene an ein solches stellten. Aus wenigen Begriffen und Vordersätzen vermögen wir durch logisches Schliessen Folgerungen abzuleiten, die sich in der Erfahrung vollständig bestätigt finden. Aber obschon dies gelungen ist, sind wir in unseren Ansprüchen ungemein bescheidener geworden. Wir wissen zu wohl, auf welche Art dieses System zu Stande gekommen ist, um in ihm etwas Höheres erblicken zu können, als das Endergebniss der Bemühungen vieler grosser Geister zur geordneten und möglichst gedrängten Wiedergabe der Erfahrungen.

Freilich gehört diese Auffassung vom Ursprunge und

vom Wesen der Mechanik einer viel jüngeren Zeit an, als die Aufstellung ihrer Lehren selbst. Es erregte zuerst Befremden, als der im Jahre 1887 verstorbene Physiker Gustav Kirchhoff als Zweck der Mechanik die Beschreibung der beobachtbaren Naturerscheinungen, die sich auf das Gleichgewicht und die Bewegung der wägbaren Körper beziehen, bezeichnete. Schon dieser Ausspruch deckte sich, so wie er gemeint war, mit dem, was ich vorher darüber auseinandersetzte. Namentlich war es aber das Verdienst des Wiener Physikers und Philosophen Ernst Mach, die Anschauungen nach dieser Richtung hin zu klären.

Später hat es dann der uns leider so früh durch den Tod entrissene Physiker Heinrich Hertz — ein ehemaliger Studirender unserer Münchener Hochschule — als die Aufgabe der Mechanik bezeichnet, Gedankenbilder von den Dingen der Aussenwelt und ihren Beziehungen zu entwerfen, die logisch zulässig, richtig und einfach sind. Die erste Forderung sagt, dass die Bilder deutlich vorstellbar und in sich widerspruchsfrei sein müssen. Mit der zweiten ist gemeint, dass die logischen Folgerungen, die wir durch den Verstandesgebrauch aus der Verknüpfung dieser Bilder ziehen können, in Uebereinstimmung mit den naturnothwendigen Folgen stehen müssen, die einem solchen Zusammentreffen in der Wirklichkeit entsprechen. Die dritte Forderung endlich bezieht sich darauf, dass für den Fall der Möglichkeit verschiedener Darstellungen, die alle den ersten beiden Forderungen genügen, die einfachste unter ihnen ausgewählt werden soll, also jene, die uns mit der geringsten Mühe oder die uns am besten zum Ziele führt. Die letzte Forderung setzt freilich eine Abschätzung voraus, die je nach der Person des Beurtheilers verschieden ausfallen kann. In der That hat gerade in Anknüpfung an diese letzte Forderung Hertz eine von der historischen abweichende Fassung der mechanischen Grundvorstellungen gegeben, die er aber selbst nur den mit der Mechanik auf dem historischen Wege schon vertraut Gewordenen empfiehlt und über deren behauptete grössere Einfachheit man daher sehr im Zweifel

sein darf. Es kommt eben sehr darauf an, welchen Sinn man mit dem Worte „einfach“ verbindet. Im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist die allgemein eingeführte historische Darstellung die einfachere.

Bis jetzt habe ich immer nur von der Mechanik im Allgemeinen als einer Naturwissenschaft in ihrem höchsten, auf anderen Gebieten bisher noch nicht erreichten Vollendungsgrade gesprochen. Bei der technischen Mechanik tritt als bestimmender Beweggrund für ihre Fassung zu der Absicht einer Erforschung der Wirklichkeit (in dem vorher erklärten Sinne) noch die andere Absicht, ihre Lehren nutzbringend in der Technik zu verwerthen. Auch dieser Zweck setzt freilich voraus, dass wir die Naturthatsachen zunächst richtig erkennen. Die praktischen Anforderungen der Technik haben jedoch vielfach bestimmend auf den weiteren Ausbau der Mechanik eingewirkt. Gar viele Vorstellungsreihen sind auf diesem Wege entstanden, von denen manche schon seit längerer Zeit dem Lehrinhalte der allgemeinen Mechanik einverleibt wurden, während andere auch jetzt noch ausschliesslich in der technischen Mechanik zur Sprache zu kommen pflegen.

Der tiefere Grund für diese Absonderung der technischen Mechanik als eines besonderen Zweiges der Wissenschaft liegt darin, dass die allgemein gültigen Lehren der Mechanik keineswegs dazu ausreichen, alle Fragen, die sich im Gebiete der Mechanik überhaupt aufstellen lassen, streng und genau zu lösen. Solchen Fällen steht aber der Naturforscher anders gegenüber als der Techniker. Jener hat zwar auch den Wunsch, die noch bestehenden Zweifel aufzuhellen; er hat aber mit der Beantwortung irgend einer einzelnen Frage keine Eile und stellt sie ohne Bedenken einstweilen zurück, wenn es ihm nicht gelingt, eine befriedigende Lösung dafür zu finden. Der Techniker dagegen steht unter dem Zwange der Nothwendigkeit; er muss ohne Zögern handeln, wenn ihm irgend eine Erscheinung hemmend oder fördernd in den Weg tritt und er muss sich daher unbedingt auf irgend eine Art, so gut es eben gehen will, eine theoretische Auffassung davon

zurechtlegen. Den strengen Anforderungen, die man sonst an die Lehren der Mechanik stellt, können solche durch die Noth gebotenen Schöpfungen zunächst zwar nicht entsprechen; zuweilen gelingt es aber doch, sie bei weiterer Ausarbeitung allmählich so umzugestalten, dass sie mit Fug und Recht als gute Theorien bezeichnet werden können. Im anderen Falle müssen sie, um dem unabweisbaren praktischen Bedürfnisse zu genügen, einstweilen unter der Bezeichnung als Näherungstheorien in der technischen Mechanik fortgeführt werden, aber mit der ausdrücklichen Warnung, dass ihre Aussagen nicht immer zuverlässig sind, und mit dem Vorbehalte, sie, sobald es gelingt, durch genauer ausgearbeitete Theorien zu ersetzen, die den vorher angeführten drei Forderungen von Hertz besser genügen.

Wie sich die Kraft eines Baumes darin zeigt, dass er frische Zweige treibt, so dürfen wir es auch als ein Zeichen von regem wissenschaftlichem Leben in der heutigen Technik betrachten, dass sie nicht müde wird, die ihr gegenüber tretenden Thatsachen in Regeln und Sätze zu fassen. Dadurch werden die ersten Ansätze zur Bildung neuer Theorien geschaffen und wenn auch viele davon nicht zu diesem Ziele führen, weil sie zu weit von der Wahrheit abweichen, so tragen sie doch alle dazu bei, den Blick des Menschen zu schärfen, ihn auf die noch bestehenden Abweichungen aufmerksam zu machen und ihn so der richtigen Fassung immer näher zu führen. Wer aber erst die richtige Theorie eines Vorgangs erfasst hat, der vermag ihn, sofern ein Eingriff überhaupt möglich ist, nach Wunsch zu leiten und darum ist die Wissenschaft die gewaltigste Waffe, die Menschen und Völkern zu Gebote steht.

Erster Abschnitt.

Mechanik des materiellen Punktes.

§ 1. Begriff des materiellen Punktes.

Das einfachste Bild, das sich die Mechanik zur Darstellung eines Körpers zurecht gelegt hat, ist der materielle Punkt. Es wird am besten sein, wenn ich zunächst auseinandersetze, wie man auf diesen Begriff gekommen ist. Oft genug bewegen sich bei einem Vorgange alle Theile eines Körpers genau in derselben Weise. Und selbst wenn dies nicht ganz genau zutrifft, drängt sich eine bestimmte Art der Bewegung, die allen Theilen gemeinsam ist, der Beobachtung häufig in erster Linie auf, so dass wir, um das Wesentliche von dem minder Wichtigen zu unterscheiden, zunächst unseren Blick nur auf die gemeinschaftliche Hauptbewegung richten und die Untersuchung der vorkommenden Unterschiede auf eine spätere, eingehendere Betrachtung verschieben. Ein Fall dieser Art ist z. B. die Bewegung eines Eisenbahnzugs auf einer geraden Strecke. So lange wir nicht auf die Räder achten, die eine von den Wagengestellen abweichende Bewegung ausführen, ebenso die in besonderer Bewegung begriffenen Theile des Kurbelmechanismus auf der Lokomotive ohne Berücksichtigung lassen und ausserdem von den kleinen, unregelmässigen, schwingenden und stossartigen Bewegungen, die daneben vorkommen, absehen, können wir in erster Annäherung sagen, dass der ganze Eisenbahnzug eine fortschreitende Bewegung besitzt, die jeden Theil in einer gegebenen Zeit um gleich

viel in derselben Richtung weiterführt. So lange wir uns nur für diese gemeinsame Hauptbewegung interessiren, ist es gleichgültig, welchen Theil wir besonders ins Auge fassen, ob wir also etwa den ersten oder den letzten Wagen des Zuges beobachten. Schon dann, wenn wir den Antheil der Hauptbewegung an der Bewegung eines einzigen Punktes, den wir durch irgend ein Kennzeichen hervorgehoben haben, anzugeben vermögen, ist die Bewegung damit zugleich für den ganzen Zug bekannt. Wir verfahren in solchen Fällen nur folgerichtig, wenn wir von der hier unwesentlichen besonderen Gestalt und Beschaffenheit der sich bewegenden Körper vollständig Abstand nehmen und sie uns von vornherein unter dem Bilde eines einzigen beweglichen Punktes vorstellen. Der besondere Vorzug einer solchen Abstraction liegt darin, dass sie uns sofort deutlich darauf hinweist, auf was die Betrachtung hingelenkt werden soll und welche Umstände zunächst ausdrücklich von der Untersuchung ausgeschlossen werden sollen. Uebrigens liegt diese Art der Beschreibung des Hauptvorgangs so nahe, dass sie auch im bürgerlichen Leben allgemein geübt wird und daher von vornherein jedermann geläufig ist.

In manchen Fällen genügt es zwar, sich unter dem bewegten Punkte einfach einen geometrischen Punkt zu denken. Sobald wir aber z. B. danach fragen, wie die Bewegung ausfällt, wenn die Lokomotive mit einer gewissen Leistung arbeitet, müssen wir dem Punkte, den wir als Bild für den bewegten Eisenbahnzug benutzen, noch eine besondere Eigenschaft zuschreiben. Es kommt dann sehr wesentlich darauf an, aus wie vielen Wagen der Zug besteht und wie schwer diese belastet sind, während alle anderen Eigenschaften daneben immer noch gleichgültig sind. Diesem Umstande tragen wir dadurch Rechnung, dass wir dem Punkte eine gewisse Masse zuschreiben. In welchen Einheiten wir diese Masse ausdrücken wollen, ist zunächst gleichgültig; nur daran wollen wir von Anfang an festhalten, dass die Masse der Anzahl der Fahrzeuge proportional zu setzen ist, wenn diese alle unter

einander übereinstimmen und dass überhaupt gleichen Raumeinheiten oder gleichen Gewichtseinheiten desselben Stoffes dieselbe Masse zukommt. Für's Erste genügt dies vollständig, um den Begriff eines mit einer bestimmten Masse begabten geometrischen Punktes deutlich und anschaulich festzustellen. Die Frage, wie die Massen verschiedener Körper gegeneinander verglichen werden können, bleibt eine spätere Sorge. Den mit der genannten Eigenschaft ausgestatteten geometrischen Punkt bezeichnet man in der Mechanik als einen materiellen Punkt.

Unter dem Bilde eines materiellen Punktes stellt man sich in der Mechanik z. B. auch einen Stein vor, der eine Wurfbewegung ausführt oder auch ein im Fluge begriffenes Geschoss, das von einem Gewehre oder einem Geschütze fortgeschleudert wurde. Sogar die ganze Erde wird als materieller Punkt aufgefasst, wenn man ihre Planetenbewegung um die Sonne untersucht. In solchen Fällen muss man freilich immer des Umstandes eingedenk bleiben, dass neben der Hauptbewegung, die man sich unter dem Bilde des materiellen Punktes verkörpert, auch noch andere Bewegungen, also bei der Erde z. B. die tägliche Drehung um ihre Axe hinzukommen, die in anderer Hinsicht von grosser Wichtigkeit sind und die eben gerade nur bei der Frage, mit der man sich im Augenblicke beschäftigt, als belanglos angesehen werden dürfen. Mit welchem Rechte dies im einzelnen Falle geschehen darf, wird uns eine spätere Untersuchung noch deutlich erkennen lassen. Nur darauf soll jetzt schon hingewiesen werden, dass das Bild des materiellen Punktes ganz unzulänglich wird, wenn drehende Bewegungen eine Hauptrolle spielen oder wenn diese selbst näher untersucht werden sollen. Die von dem Schwungrade einer Dampfmaschine ausgeführte Bewegung kann z. B. durchaus nicht unter dem Bilde eines einzigen bewegten materiellen Punktes aufgefasst werden. Wir werden dadurch von vorherein darauf aufmerksam gemacht, dass die Mechanik des einzelnen materiellen Punktes nur einen eng begrenzten Theil des ganzen Lehrinhaltes der Mechanik umfassen kann.

In solchen Fällen kann man sich aber dadurch helfen, dass man zunächst nur einen kleinen Theil des ganzen bewegten Körpers betrachtet. Ein je kleineres Stück man etwa von dem Schwungrade der Dampfmaschine herausgreift, um so geringer werden die Unterschiede zwischen den augenblicklichen Bewegungen der Bestandtheile, die dieses Stück immer noch umfasst. Man braucht das Stück nur klein genug zu wählen, um auf die dann noch verbleibenden geringfügigen Unterschiede nicht mehr achten zu müssen. Um dann die Bewegung des ganzen Körpers vor Augen zu haben, ist es nur nöthig, sich die Bewegungen aller einzelnen Stücke, in die man ihn sich zerlegt vorstellte, zusammen zu denken. Für jedes Stück reicht das Bild des materiellen Punktes vollständig aus und der ganze Körper erscheint uns jetzt folgerichtig unter dem Bilde eines Haufens materieller Punkte. Wir werden später sehen, dass gerade diese Vorstellung sehr fruchtbar ist, da sie die Brücke für uns bildet, um die in der Mechanik des materiellen Punktes gewonnenen Gesetze auf das Verhalten beliebig zusammengesetzter und beliebig bewegter Körper zu übertragen. Hierdurch wird die Mechanik des materiellen Punktes, so engbegrenzt ihre unmittelbare Anwendbarkeit auch sein mag, zum Fundamente der ganzen Mechanik.

Der Umstand, dass man bei der soeben entwickelten Vorstellungsreihe die Stücke des ganzen Körpers, die man noch unter dem Bilde eines materiellen Punktes zusammenfassen kann, sehr klein wählen muss, wenn die Beschreibung des ganzen Vorgangs nicht an Ungenauigkeiten leiden soll, hat oft dazu geführt, dass man den materiellen Punkt von Anfang an nur als einen unendlich kleinen Theil eines Körpers bezeichnete oder ihn einfach mit den Atomen oder Molekülen des Körpers identificirte. In früheren Arbeiten bin ich auch selbst von dieser Anschauung ausgegangen. Später bin ich aber davon zurückgekommen und habe dafür die vorher entwickelte Begriffsabgrenzung gewählt. In den Resultaten macht dies zwar keinen Unterschied; man kann aber gegen jene Gleichsetzung der materiellen Punkte mit den Molekülen ein-

wenden, dass ein einzelnes Molekül weder gesehen noch sonst beobachtet werden kann und dass man daher eine für die Mechanik ganz überflüssige Vorstellung damit einführt, was gegen das Gebot der Einfachheit unserer Bilder verstösst. Selbstverständlich sind alle Gesetze der Mechanik des materiellen Punktes aus Beobachtungen an wirklichen Körpern abgeleitet worden, die sich im gegebenen Falle in dem vorher angegebenen Sinne als materielle Punkte auffassen liessen und es wäre daher nur eine willkürliche Zuthat, wenn wir nachträglich Alles, was so gefunden wurde, in erster Linie nur auf äusserst kleine Theilchen des Körpers beziehen wollten. In manchen Fällen wird dies allerdings nöthig werden; aber der Umstand, dass die in der Mechanik des materiellen Punktes abzuleitenden und später auf solche Fälle anzuwendenden Beziehungen von der absoluten Grösse der Körper unabhängig gefunden werden, gestattet uns dann leicht ihre Benutzung auch unter solchen Umständen. Mit anderen Worten: der Körper oder das Stück eines Körpers, das wir uns unter dem Bilde eines materiellen Punktes vorstellen, kann zwar klein, muss aber nicht sehr klein sein.

§ 2. Das Trägheitsgesetz.

Ein materieller Punkt, der sich selbst überlassen wird, auf den also von anderen Körpern her keine Einwirkung ausgeübt wird, bewegt sich in derselben Richtung mit unveränderter Geschwindigkeit weiter. Unter der Geschwindigkeit versteht man hierbei den Weg, der in jeder Zeiteinheit zurückgelegt wird. Als Zeiteinheit wird in der Mechanik gewöhnlich die Secunde mittlerer Sonnenzeit gewählt. — Ruht der Körper zu Anfang, so bleibt er dauernd in Ruhe.

Es ist zwar nicht möglich, einen Körper allen äusseren Einflüssen vollständig zu entziehen und insofern fehlt dem Trägheitsgesetze, das in diesen Sätzen ausgesprochen ist, die unmittelbare Bestätigung durch die Erfahrung. Man kann aber Einrichtungen treffen, durch die wenigstens nahezu er-

reicht wird, dass sich die äusseren Einflüsse gegenseitig aufheben und je besser dies gelingt, um so mehr nähert sich das Verhalten des Körpers der Aussage des Trägheitsgesetzes. Den Alten war das Trägheitsgesetz unbekannt; dagegen ist es in den Lehren der Galilei'schen Mechanik schon mit enthalten, wenn es auch erst später als das erste Grundgesetz der Mechanik hervorgehoben wurde.

Der Bewegungsvorgang bei einem sich selbst überlassenen materiellen Punkte wird hiernach vollständig durch die Angabe der Geschwindigkeit sowohl ihrer Grösse als ihrer Richtung nach beschrieben. Es ist zweckmässig — denn es dient zur Vereinfachung der Beschreibung —, wenn man diese beiden Angaben nicht trennt, sondern sie zu einer einzigen vereinigt. Wir wollen daher die Geschwindigkeit, wenn nichts Anderes darüber ausgemacht wird, stets als eine gerichtete Grösse, oder, wie man solche Grössen auch nennt, als einen Vector auffassen. Wem das Fremdwort „Vector" nicht gefällt, mag dafür auch einfach „Strecke" setzen, indem er diese Bezeichnung in einem erweiterten Sinne gebraucht.

Um in der Schreibweise deutlich hervorzuheben, dass es sich nicht nur um die Grösse, sondern zugleich auch um die Richtung handeln soll, werde ich die gerichteten Grössen immer mit deutschen Buchstaben bezeichnen, die im Druck ausserdem noch durch fette Lettern gekennzeichnet werden. Wenn ich hiernach die Geschwindigkeit mit $\mathfrak{v}$ und die Zeit mit t bezeichne, lässt sich das Trägheitsgesetz auch durch die Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = 0 \tag{1}$$

zum Ausdrucke bringen. Denn wenn man den Differentialquotienten einer Grösse nach der Zeit gleich Null setzt, heisst dies, dass sich die Grösse selbst im Verlaufe der Zeit nicht ändert. Man muss bei der Anwendung von Gleichung (1) aber stets im Gedächtnisse behalten, dass sie nur für einen sich selbst überlassenen materiellen Punkt gültig ist.

Das Trägheitsgesetz kennt heute Jedermann. Es ist aber

weniger allgemein bekannt, dass sich schon an seine Aufstellung eine erhebliche begriffliche Schwierigkeit knüpft. Bisher ist nämlich die Frage noch nicht berührt worden, von welchem Raume aus die Bewegung beobachtet werden soll. Man weiss ja, dass eine Bewegung je nach der Aufstellung des Beobachters einen ganz verschiedenen Anblick gewähren kann. Der in einem Eisenbahnzug dahinfahrende Beobachter sieht die Telegraphenstangen an sich vorüberziehen und ein Gepäckstück, das im Wagen von oben herunter fällt, bewegt sich für ihn einfach senkrecht nach abwärts, während ein auf der festen Erde stehender Beobachter die Telegraphenstangen ruhend und das Gepäckstück in einer parabolischen Bahn bewegt erblickt.

Man könnte nun zu der Annahme versucht sein, dass das Trägheitsgesetz gültig ist, falls man die Bewegung von der festen Erde aus anblickt und die in den aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten zurückgelegten Wege nach Grösse und Richtung von der festen Erde her ausmisst. Bei den gewöhnlichen Anwendungen der Mechanik trifft dies in der That auch hinreichend genau zu. Ganz streng ist es aber nicht richtig und man kennt mehrere Versuche, die den Nachweis dafür erbringen, dass das Trägheitsgesetz für die von der festen Erde aus beobachteten Bewegungen irdischer Körper nicht genau gültig sein kann. Der bekannteste darunter ist der Foucault'sche Pendelversuch. Von anderen sei nur noch erwähnt, dass ein Körper, der in einen tiefen Schacht hinabfällt, sich nicht genau längs der Lothlinie bewegt, sondern eine freilich nur ganz kleine und schwer beobachtbare seitliche Ablenkung erfährt, die man dadurch erklärt, dass sich die Erde während der Fallzeit weiter gedreht habe und dass sich dabei die dem Mittelpunkt näher gelegenen Stellen mit geringerer Geschwindigkeit fortbewegt hätten, als der Eingang des Schachtes.

In der That pflegt man alle diese Versuche als Beweise für die Axendrehung der Erde im Sinne des Kopernikanischen Weltsystems anzuführen. Was soll dies aber heissen? Rein

geometrisch genommen kommt es auf dasselbe hinaus, wenn man sagt, die Erde stehe fest und das ganze Himmelsgewölbe drehe sich um sie, wie man im Ptolemäischen Weltsysteme das Sachverhältniss auffasste oder wenn man wie im Kopernikanischen Weltsysteme die Erde sich drehen lässt. Es kommt dies nur auf einen Wechsel in der gedachten Aufstellung des Beobachters hinaus. Freilich hatte die Kopernikanische Auffassung den unermesslichen praktischen Vorzug, dass die Beschreibung der Bewegungen der Himmelskörper gegen einander dadurch ungemein vereinfacht wurde. Aber rein geometrisch genommen würde dadurch die Ptolemäische Darstellung noch nicht als gradezu falsch oder unzulässig, sondern nur als unzweckmässig nachgewiesen sein.

Durch den Foucault'schen Pendelversuch (und die ihm verwandten Erfahrungen) wird aber die Fragestellung vollständig geändert. Wir werden durch ihn darauf aufmerksam gemacht, dass wir uns den Beobachter nicht auf der festen Erde aufgestellt denken dürfen, sondern dass wir ihm jedenfalls irgend einen anderen Beobachtungsposten anweisen müssen, wenn das Trägheitsgesetz für ihn streng gültig sein soll. Wie wir diesen Beobachtungsposten auswählen und fest legen sollen und ob es überhaupt möglich ist, ihn so auszuwählen, dass das Trägheitsgesetz für ihn erfüllt ist, kann man aus dem Foucault'schen Pendelversuch allein noch nicht schliessen. Nur soviel erkennen wir daraus, dass der Raum, in dem sich der Beobachter befindet, die Axendrehung der Erde nicht mitmachen darf.

Andererseits beruht aber die ganze Mechanik der Himmelskörper, die sich so gut bewährt hat, wie kaum eine andere theoretische Folgerung der Mechanik, auf der Annahme der strengen Gültigkeit des Trägheitsgesetzes, zunächst für irgend einen Raum. Zugleich erfahren wir aus den astronomischen Untersuchungen, dass dieser unverrückbare Standpunkt des Beobachters nicht etwa auf der Sonne angenommen werden darf. Wir werden dadurch zu der Annahme geführt, dass das Trägheitsgesetz zunächst überhaupt für irgend einen Raum

streng gültig ist und ferner, dass dieser Raum nicht von vornherein genau angegeben werden kann, sondern dass es vielmehr als Aufgabe der Astronomie betrachtet werden muss, diesen festen Raum, auf den alle Bewegungen bezogen werden müssen, wenn das Trägheitsgesetz zutreffen soll, zu ermitteln und ihn durch eine geeignete Beschreibung kenntlich zu machen. Ich will schon hier vorausschicken, dass der gesuchte Raum voraussichtlich durch den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Körper unseres Sonnensystems und durch die sogenannte unveränderliche Ebene, auf die ich freilich erst im vierten Bande zurückkommen werde, bestimmt ist. Für jetzt genügt es zur Klärung der mechanischen Grundbegriffe, dass wir allen Grund zu der Annahme haben, dass ein solcher fester Raum, der für die strenge Gültigkeit der astronomischen Mechanik gefordert werden muss, als wirklich vorhanden vorausgesetzt werden darf. Eine Bewegung, wie sie von diesem Raume aus gesehen erscheint, bezeichne ich als eine absolute, die von einem Himmelskörper oder von einem anderen bewegten Fahrzeuge aus beobachtete Bewegung als eine relative.

Wie man aus diesen Betrachtungen erkennt, liegt die Bedeutung des Foucault'schen Pendelversuchs nicht eigentlich in einer Entscheidung zwischen dem Ptolemäischen und dem Kopernikanischen Weltsysteme. Wir müssen vielmehr ganz unabhängig von dieser Frage schliessen, dass das Trägheitsgesetz, falls es überhaupt strenge Gültigkeit haben soll, nur für eine bestimmte Art der Aufstellung des Beobachters gültig bleiben kann und die Bedeutung des Foucault'schen Pendelversuchs liegt dann darin, dass er uns als Aufstellungsort auf einen Raum hinweist, der die Axendrehung der Erde nicht mitmacht.

§ 3. **Die Kräfte.**

Schon vorher war die Rede davon, dass der Bewegungszustand eines Körpers durch die Anwesenheit anderer Körper beeinflusst werden kann. In vielen Fällen ist uns dieser be-

stimmende Einfluss schon aus rein geometrischen Gründen ohne Weiteres verständlich, nämlich immer dann, wenn eine Berührung zwischen den Körpern stattfindet. Hier kommt uns auch die unmittelbare sinnliche Wahrnehmung zu Hülfe, falls unser eigener menschlicher Körper jener ist, der den Einfluss ausübt. In anderen Fällen dieser Art wird die Vorstellung des wechselseitigen Verhältnisses wenigstens sehr gefördert, wenn wir uns selbst in die Lage des jenen Einfluss bewirkenden Körpers versetzt denken, was gewöhnlich möglich ist und oft genug ganz unbewusst geschieht. Immer wenn unser eigener Körper dabei im Spiele ist, haben wir eine Empfindung für die Grösse und auch für die Richtung des Einflusses, den wir auf den anderen Körper zur Geltung bringen, die uns beide wenigstens ungefähr abzuschätzen gestattet. Man hat diese Fähigkeit sehr treffend als den Kraftsinn bezeichnet. Der Kraftbegriff knüpft daher ganz unmittelbar an eine der alltäglichsten und uns am besten vertrauten Erfahrungen an und er eignet sich darum so gut wie kaum irgend ein anderer zur Verwerthung für den Aufbau des Lehrgebäudes der Mechanik. Bei dem von Hertz gemachten Versuche, von dem ich früher sprach, die Lehren der Mechanik auf eine von der historisch gewordenen abweichende Basis zu stellen, handelte es sich darum, den Kraftbegriff vollständig zu vermeiden. So schön diese Idee von ihrem Urheber auch durchgeführt ist, wird man ihr nach dem, was ich eben sagte, doch kaum eine erhebliche Bedeutung für die zweckmässigste Fassung der Grundbegriffe zugestehen dürfen.

Mit Hülfe unseres eigenen Körpers vermögen wir unmittelbar nur dann eine Einwirkung auf den Bewegungszustand eines anderen Körpers auszuüben, wenn wir mit diesem in Berührung sind. Aus dieser Erfahrung, die so alt ist, wie das Menschengeschlecht selbst, ist die Vorstellung entstanden, dass zur Uebertragung einer Kraftäusserung zwischen zwei Körpern, wenn nicht eine unmittelbare Berührung, so doch jedenfalls eine die Verbindung herstellende Kette von Zwischengliedern erforderlich ist. Der menschliche Verstand hat sich

immer wieder dagegen gesträubt, die Vorstellung einer unmittelbaren Fernewirkung zuzulassen. Wer mit den Anschauungen, die ich in der Einleitung über die Entstehung unserer Wissenschaft auseinandergesetzt habe, einverstanden ist, begreift sehr wohl dieses hartnäckige Festhalten an einem Grundsatze, der aus den frühesten Zeiten der Menschheit herstammt. Er wird freilich zugleich der Meinung sein, dass es noch keineswegs als ausgemacht gelten kann, ob der Grundsatz als bindend für unsere Naturauffassung anerkannt werden darf. Nur das Streben, falls es möglich ist, alle Kraftäusserungen in letzter Linie auf Nahewirkungen zurückzuführen, wird er im Interesse der Einfachheit unserer Naturbeschreibung als berechtigt anerkennen und es selbst thunlichst zu fördern suchen.

Ein Magnet bedarf kein sichtbares Zwischenglied, um auf ein Eisenstück in seiner Nähe eine Kraftäusserung zu übertragen. Auch die allgemeine Gravitation, die bei den irdischen Vorgängen durch die Erscheinung der Schwere hervortritt, gehört in die Classe der Fernwirkungen. Als Newton das Gravitationsgesetz aufstellte, wurde die unvermittelte Fernwirkung noch von aller Welt und im Grunde genommen auch von ihm selbst als unbegreiflich angesehen. Die Aufstellung geschah auch nur in der ausgesprochenen Absicht, eine Beschreibung der wirklich beobachteten Erscheinungen aus einem möglichst allgemeinen Gesichtspunkte zu geben. Dem Streben nach einer Zurückführung der anscheinenden Fernwirkung auf Nahewirkungen sollte dadurch die Berechtigung nicht abgesprochen werden. Newton lehnte es nur ab, sich selbst an der Speculation über Möglichkeiten dieser Art zu betheiligen. Dahin ist sein berühmter Ausspruch: „hypotheses non fingo“ zu deuten.

Wie anpassungsfähig der menschliche Geist an die nach festen Regeln immer in der gleichen Art wiederkehrenden Vorgänge der Aussenwelt ist, zeigt sich recht deutlich in der Entwickelung der Wissenschaft seit Newton bis über die Mitte unseres Jahrhunderts hinaus. Die Vorstellung der Fern-

wirkung, die zuerst so lebhaften Widerstand fand, fasste in den folgenden Generationen bald so feste Wurzeln, dass man sich es geradezu zur Aufgabe machte, nun alle Naturerscheinungen auf Fernwirkungen zurückzuführen. Selbst die handgreiflichen Nahewirkungen bemühte man sich auf Fernwirkungen der Moleküle zurückzuführen, die nur in kleinsten Abständen von merklicher Grösse werden sollten.

Zu allen Zeiten laufen aber neben den herrschenden wissenschaftlichen Lehrmeinungen bei einzelnen selbständigen Denkern auch abweichende Ansichten nebenher. Sobald sich die herrschende Anschauung mit einer bestimmten Thatsache, die gerade in den Vordergrund gerückt oder die eben erst neu gefunden ist, nicht recht abzufinden weiss, während dies einer anderen viel besser glückt, kommt nun diese zur allgemeinen Beachtung und es entsteht ein von der Mehrzahl aller Forscher getheiltes Abwägen darüber, ob die frühere Anschauung beizubehalten oder ob sie durch die neu vorgeschlagene zu ersetzen sei.

Im vorliegenden Falle war es Faraday, der zum ersten Male wieder seit der Newton'schen Epoche die scheinbaren Fernwirkungen im elektrischen oder magnetischen Felde der Vermittelung durch ein Zwischenglied zuschrieb. Diese Anschauung ist seitdem, freilich erst nach langen Erwägungen und unter dem Eindrucke der Entdeckung von neuen Erscheinungen, zu denen sie den Leitfaden abgegeben hatte, allgemein angenommen worden. Nur bei den Erscheinungen der Gravitation fehlt es auch heute noch an einer den Thatsachen gerecht werdenden Vorstellung darüber, wie die Annahme einer unmittelbaren Wirkung in die Ferne umgangen werden könnte. Die Bemühungen vieler Forscher richten sich auf diesen Punkt; von Erfolg werden sie aber erst dann gekrönt sein, wenn es auf diesem Wege gelingt, nicht nur eine leidliche Erklärung der bereits bekannten Thatsachen zu geben, sondern zugleich neue vorauszusagen, die von der Erfahrung nachher bestätigt werden. Eine Theorie, die nicht erheblich mehr leistet, als die schon vorhandenen, darf immer nur auf eine kühle Auf-

nahme bei der Mehrheit des wissenschaftlichen Publicums rechnen. Dieses Verhalten ist auch ganz verständig und wohl angebracht, um die Wissenschaft vor unnöthigen oder vorzeitigen Umwälzungen zu bewahren.

Dieser Streit der Meinungen, so wichtig er auch für den weiteren Fortschritt unserer Naturerkenntniss ist, berührt doch nur in geringem Grade die Grundlagen der Mechanik. Für die Mechanik kommt es zunächst nur darauf an, ob überhaupt Kräfte übertragen werden, und sie vermag daher mit Fernwirkungen ebenso gut zu rechnen als mit Nahewirkungen. Nur die eine Erkenntniss ist für sie von ausschlaggebender Bedeutung, dass Fernkräfte und Nahekräfte im Sinne der Mechanik Grössen von gleicher Art sind, die unmittelbar miteinander verglichen und in denselben Einheiten ausgemessen werden können. Dieser Satz ist an sich nicht selbstverständlich, sondern aus der Erfahrung hervorgewachsen.

§ 4. Der freie Fall.

Unsere heutige Mechanik hat von der Untersuchung Galileis über die Fallbewegung ihren Ausgang genommen. Es empfiehlt sich daher auch heute noch, der Erörterung der Fallgesetze einen der ersten Plätze in der Mechanik einzuräumen und im Anschlusse daran die vorhergehenden allgemeinen Erörterungen weiter zu vertiefen und den Begriff der Kraft dadurch näher zu umgrenzen.

So lange der Luftwiderstand nicht ins Gewicht fällt und andere Nebenumstände von geringem Belange ausser Acht gelassen werden dürfen, besteht zwischen dem Wege s, den der fallende Körper zurückgelegt hat und der inzwischen verstrichenen Zeit der Erfahrung zufolge die Beziehung

$$s = \frac{1}{2} g t^2. \qquad (2)$$

Darin ist $\frac{1}{2}g$ eine Constante, die an demselben Orte der Erde für alle fallenden Körper gleich gross ist, aber an verschiedenen Orten ein wenig wechselt. Dass man $\frac{1}{2}g$ und nicht

einen einzigen Buchstaben für diese Constante schreibt, ist darin begründet, dass die weiter folgenden Beziehungen durch diese an sich willkürliche Wahl einen einfacheren Ausdruck erhalten.

Die durch Gl. (2) dargestellte Bewegung wird mit der Zeit immer rascher, denn wenn z. B. t auf das Doppelte angewachsen ist, hat sich der Weg s vervierfacht; in der zweiten Hälfte der hierbei ins Auge gefassten Fallzeit legt demnach der fallende Körper einen dreifach so grossen Weg zurück, als in der ersten Hälfte. Unter diesen Umständen müssen wir uns darüber verständigen, was wir unter der Geschwindigkeit v des fallenden Körpers in einem gewissen Augenblicke oder an einer gewissen Stelle seiner Bahn verstehen wollen. Da die Bewegung dauernd in der Richtung der Lothlinie erfolgt, ist die Richtung der Geschwindigkeit von vornherein gegeben und es kann sich nur noch um ihre Grösse handeln. Dieser Erwägung habe ich dadurch Ausdruck verliehen, dass ich die Geschwindigkeit mit dem lateinischen Buchstaben v und nicht mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet habe.

Bisher ist der Begriff der Geschwindigkeit nur für den Fall der gleichförmigen Bewegung eingeführt worden und es ist damals darunter der Weg verstanden worden, der in jeder Zeiteinheit zurückgelegt wird. Um den Begriff auf den vorliegenden Fall zu übertragen, vergleichen wir die Bewegung im gegebenen Augenblicke mit einer gleichförmigen und sagen, es soll unter der Geschwindigkeit jener Weg verstanden werden, den der Körper in der nächsten Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn sich an seinem augenblicklichen Bewegungszustande nichts änderte. Man wird bei dieser Festsetzung freilich noch eine nähere Erklärung darüber vermissen, was unter diesem „augenblicklichen Bewegungszustande" zu verstehen sei. Um diese zu geben, wollen wir die Bewegung nur während eines sehr kleinen Zeittheilchens dt ins Auge fassen; der Weg, der währenddessen zurückgelegt wird, sei ds. Wenn die Bewegung von nun ab in eine gleichförmige überginge, würde auch in jedem folgenden dt ein ebenso grosser Weg ds zurückgelegt. Wenn die Zeiteinheit n Zeittheilchen dt enthält, so dass also

der Werth von dt gleich $\frac{1}{n}$ ist, wäre der in der Zeiteinheit durchlaufene Weg das n-fache von ds, also $v = nds$ oder mit Rücksicht auf den Zusammenhang zwischen n und dt,

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{3}$$

Man sieht auch leicht ein, wesshalb ds und dt als sehr kleine, oder streng genommen als unendlich kleine Grössen aufgefasst werden müssen. Die Grösse v, die wir bestimmen wollen, ändert sich selbst unausgesetzt, und wenn wir den augenblicklichen Bewegungszustand durch die zusammengehörigen Werthe von ds und dt möglichst genau beschreiben wollen, müssen wir daher, um die Aenderung dieses Zustandes während dt keinen Einfluss auf unser Resultat gewinnen zu lassen, beide möglichst klein wählen. Mit anderen Worten: v ist der Grenzwerth, dem sich das Verhältniss $ds : dt$ bei immer kleiner werdendem dt und ds nähert. Dieser Grenzwerth wird aber in der Differentialrechnung als der Differentialquotient von s nach t bezeichnet und wir können ihn nach den Lehren dieser Wissenschaft ohne Weiteres aus Gl. (2) berechnen.

Diese Betrachtungen bleiben nicht nur für die Fallbewegung, sondern auch für jede beliebige andere geradlinige Bewegung gültig und wegen der häufigen Anwendung, die von Gl. (3) zu machen ist, möge noch eine andere Erwägung, die zu dem gleichen Ergebnisse führt, erwähnt werden. Um die Geschwindigkeit des fallenden Körpers an einer bestimmten Stelle seiner Bahn zu ermitteln, denke man sich eine Strecke Δs der Bahn, die die betreffende Stelle mit enthält. Die Zeit, die zum Durchlaufen dieser Strecke gebraucht wird, sei mit Δt bezeichnet. Dann gibt zunächst $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die durchschnittliche Geschwindigkeit während Δt an, nämlich jene Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung, bei der Δs in der gleichen Zeit Δt zurückgelegt würde. Je enger man die Grenzen zieht, zwischen denen man die Bewegung verfolgt, um so genauer schliesst sich die durchschnittliche Geschwindigkeit dem an, was wir suchen. Wir werden daher, wie vorher, dazu geführt,

die Geschwindigkeit im gegebenen Augenblicke durch den Grenzwerth des Verhältnisses $\Delta s : \Delta t$ für unendlich abnehmende Zeit- und Wegelemente zu messen.

Die wirkliche Ausführung der Differentiation an Gl. (2) liefert

$$v = \frac{ds}{dt} = gt. \tag{4}$$

Wir erkennen daraus, dass sich die Geschwindigkeit bei der Fallbewegung proportional mit der Zeit ändert. Die Zunahme ist daher in gleichen Zeiten immer dieselbe und die Zunahme in jeder Zeiteinheit ist gleich g. Diese Grösse heisst die Beschleunigung der Fallbewegung oder auch kurz die Beschleunigung der Schwere.

Nach dem Trägheitsgesetze würde sich v nicht ändern, wenn der Körper allen äusseren Einwirkungen entzogen wäre. Wir schliessen daraus, dass auf jeden Körper an der Erdoberfläche eine Kraft wirkt, durch die die berechnete Geschwindigkeitsvermehrung hervorgebracht wird, falls sie allein zur Geltung kommt. Diesen Schluss bringen wir in Verbindung mit der Erfahrung, dass es einer gewissen Kraftäusserung bedarf, um den Körper, den wir vorher im Falle beobachteten, emporzuheben. Diese sinnliche Wahrnehmung erleichtert uns das Verständniss dafür, dass in der That eine solche Kraft von der Erde, der er zustrebt, auf jeden Körper übertragen wird. Es wird uns dadurch glaubwürdig gemacht, dass eine Kraft, die wesensgleich mit jenen Kräften ist, die wir mit Hülfe unseres Kraftsinns wahrnehmen können, an dem Körper wirkt, auch wenn kein sichtbares oder sonst bisher nachweisbares Band zwischen dem fallenden Körper und der Erde besteht. Diese Kraft wird das Gewicht des Körpers genannt.

Zugleich wird uns durch diese Ueberlegungen ein Mittel an die Hand gegeben, den bisher nur in ganz allgemeinen Umrissen gewonnenen Begriff der Kraft näher zu bestimmen und die Kräfte dadurch einer Messung zugänglich zu machen. Die Thatsache, dass die Fallbeschleunigung an verschiedenen Orten der Erde verschieden gross ist, sprechen wir dahin aus, dass auch das Gewicht desselben Körpers mit dem Orte auf

der Erde wechselt und wir setzen die Gewichte proportional mit den beobachteten Fallbeschleunigungen. Man muss wohl beachten, dass dieser Satz nicht eines Beweises fähig oder auch nur bedürftig ist. Denn er dient im Gegentheile nur dazu, das Maass für die Grösse einer Kraft näher zu bezeichnen. Nur darüber kann man Rechenschaft verlangen, ob die Kraftempfindung unseres eigenen Körpers mit dieser Festsetzung über das Maass der Kräfte parallel geht. Es handelt sich also mit anderen Worten darum, ob es uns in der That unter sonst gleichen Umständen leichter fallen würde, ein gegebenes Gewichtsstück in den äquatorialen Gegenden der Erde, wo die Fallbeschleunigung geringer ist, vom Boden aufzuheben, als in unseren Breiten. Wegen der geringen Unterschiede in der Fallbeschleunigung ist der Nachweis durch unmittelbare Abschätzung der in beiden Fällen erforderlichen Kraftäusserung nicht möglich. Wenn wir aber zeigen können, dass eine gegebene Feder in den äquatorialen Gegenden durch ein gegebenes Gewichtsstück weniger zusammengedrückt wird, als bei uns, und dabei daran denken, dass unsere Kraftempfindung, falls wir die Feder selbst zusammendrücken, soweit sie sich schätzen lässt, mit der Grösse der Zusammendrückung parallel geht, werden wir den Nachweis als erbracht ansehen dürfen. In der That kann aber jenes Verhalten der Feder als sicher nachgewiesen gelten.

Da die Fallbeschleunigung an jedem gegebenen Orte denselben Werth für alle Körper hat, folgt, dass zwei Körper, die an einer Stelle gleiches Gewicht haben, auch an allen anderen Orten der Erde von gleichem Gewichte sind. Denn die Gewichte beider ändern sich stets in demselben Verhältnisse, wenn man sie an einen anderen Ort bringt. Daraus folgt auch, dass man die Aenderung der Gewichte mit einer gewöhnlichen Wage nicht festzustellen vermag, denn beim Abwägen auf solchen Wagen handelt es sich immer nur um den Vergleich der Gewichte zweier Körper, und nicht um die Bestimmung des absoluten Gewichtes eines dieser Körper.

Wir werden aber hierdurch aufmerksam darauf gemacht, dass es für jeden gegebenen Körper ausser seinem je nach der Lage des Beobachtungsortes verschiedenen Gewichte noch eine zweite Grösse gibt, die nur von ihm selbst und nicht von seiner Lage zur Erde abhängig ist. Diese Grösse nennen wir die Masse des Körpers. Wir sehen nun auch, dass es sich beim Abwägen auf einer Hebelwage eigentlich nicht um einen Vergleich von Gewichten, sondern um einen Vergleich von Massen handelt.

Dieser Umstand hat schon häufig zu Verwirrungen geführt. Da die Sache, um die es sich hier handelt, von grösster Bedeutung für die richtige Auffassung der mechanischen Grundgesetze ist, war es nöthig, in so ausführlicher (für den Unkundigen vielleicht überflüssig weitschweifig erscheinender) Weise darauf einzugehen.

Bezeichnen wir das Gewicht des Körpers an irgend einer Stelle der Erde mit Q, die dort gültige Fallbeschleunigung mit g, so können wir nach dem Vorhergehenden

$$Q = mg \tag{5}$$

setzen. Darin ist zunächst m nur ein Proportionalitätsfactor, aber einer, der jedem gegebenen Körper eigenthümlich und von der Lage auf der Erdoberfläche unabhängig ist. Wir können daher diesen Factor m unmittelbar als das Maass für jene Grösse betrachten, die wir vorher schon als die Masse des Körpers bezeichneten.

Wir haben uns bei diesen Auseinandersetzungen schon mit dem Umstande vertraut gemacht, dass die Kraft Q, die in Folge der Schwere an dem Körper wirkt, verschiedene Werthe für diesen Körper annehmen kann und dass sich diese Unterschiede in der Veränderlichkeit von g aussprechen. Wir brauchen jetzt nur noch die Vorstellung zu Hülfe zu nehmen, dass alle mechanischen Kräfte Grössen derselben Art sind, die gleichen Wirkungsgesetzen unterliegen, um auf jenen Satz zu gelangen, den man als das dynamische Grundgesetz bezeichnet. Wir schliessen also, dass eine Beziehung von der Form der Gl. (5) immer noch bestehen bleibt, wenn auch die

Kraft Q nicht von der Schwere herrührt, sondern irgend einen anderen Ursprung hat. Bezeichnen wir eine solche Kraft von beliebiger Herkunft, die an dem Körper von der Masse m wirkt, mit P und die von ihr hervorgebrachte Beschleunigung mit b, so geht Gl. (5) über in

$$P = mb, \tag{6}$$

wofür auch in Verbindung mit Gl. (5)

$$P = \frac{Q}{g} b \tag{7}$$

geschrieben werden kann. Durch diese Gleichungen wird das dynamische Grundgesetz ausgesprochen.

§ 5. Die deductive Ableitung der Fallgesetze.

Im vorigen Paragraphen haben wir den inductiven Weg beschritten, nämlich jenen, der von einer gegebenen Beobachtungsthatsache ausgeht und durch vorsichtiges Abwägen der besten Art ihrer Deutung zur Aufstellung der Begriffe führt, durch die wir hoffen dürfen, die in dieses Gebiet fallenden Erscheinungen folgerichtig abzuleiten. Dieses inductive Verfahren muss stets bei der Begründung einer neuen Wissenschaft oder bei der Erforschung einer noch wenig bekannten Reihe von Erfahrungsthatsachen den Anfang bilden. Sobald es zu einer Auffassung geführt hat, die uns nun als Grundlage für die weitere Behandlung geeignet erscheint, muss die deductive Methode einsetzen, also jene, die sich nicht mehr unmittelbar mit dem Beobachteten, sondern nur noch mit der folgerichtigen Verknüpfung der inductiv gewonnenen Begriffe beschäftigt und der die Aufgabe zufällt, alle Folgerungen, die sich hieraus ziehen lassen, möglichst vollständig abzuleiten. Erst dann, wenn sich die Schlüsse, zu denen wir so geführt werden, bei einem erneuten Vergleiche mit entsprechend erweiterten Erfahrungen bestätigt haben, ist der Beweis dafür erbracht, dass wir durch das inductive Verfahren zur richtigen Verwerthung der Beobachtungsthatsachen gelangt waren.

Wir wollen jetzt alle Formeln, die für die Fallbewegung oder für eine andere gleichförmig beschleunigte Bewegung gelten, deductiv aus dem dynamischen Grundgesetze ableiten. Dabei müssen wir natürlich unter Anderem auch wieder zur Gl. (2) zurückgeführt werden, von der wir im vorigen Paragraphen ausgingen; zugleich werden wir aber auch noch eine Reihe neuer Beziehungen gewinnen.

Zunächst stellen wir einen analytischen Ausdruck für die Beschleunigung g — oder allgemeiner b — auf. Wir verstanden darunter die Zunahme der Geschwindigkeit mit der Zeit und können dafür

$$b = \frac{dv}{dt} \tag{8}$$

setzen. So lange die Bewegung gleichförmig beschleunigt ist, d. h. so lange nach Gl. (6) die Kraft P constant ist, können wir uns die einander entsprechenden Zuwüchse dv und dt von Geschwindigkeit und Zeit beliebig gross, also auch endlich denken. Wenn sich P allmählich ändern sollte, müssen aber beide Zuwüchse unendlich klein gewählt werden, damit wir die Beschleunigung im gegebenen Augenblicke, so wie sie zu dem augenblicklichen Werthe von P gehört, genau erhalten. Wir wollen daher ein für alle Mal unter $\frac{dv}{dt}$ in Gl. (8) den Grenzwerth verstehen, dem sich das Verhältniss beider Zuwüchse nähert, wenn beide immer kleiner gewählt werden. Dann kann Gl. (8) dahin ausgesprochen werden, dass die Beschleunigung der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit ist, wie dies auch schon durch die gewählte Schreibweise zum Ausdrucke gebracht wurde.

Mit Rücksicht auf die Gleichung (3)

$$v = \frac{ds}{dt}$$

folgt aus Gleichung (8) auch

$$b = \frac{d^2 s}{dt^2} \tag{9}$$

und die dynamische Grundgleichung kann demnach in jeder der folgenden Formen angeschrieben werden:

$$P = mb = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{10}$$

Nehmen wir nun an, dass P und hiernach auch b unveränderlich sind, so folgt aus Gl. (8) durch Integration

$$v = v_0 + bt. \tag{11}$$

Hier ist v_0 eine Integrationsconstante, deren Bedeutung sich leicht ergibt, wenn wir die Gleichung auf den Werth $t = 0$ anwenden. Wir überzeugen uns dann, dass v_0 die Anfangsgeschwindigkeit ist und werden durch dieses analytische Resultat darauf aufmerksam gemacht, dass es gar nicht nöthig ist, unsere Untersuchung auf solche Bewegungen zu beschränken, die aus der Ruhe hervorgehen, sondern dass der Körper vor dem Auftreten der Kraft P auch schon irgend eine Geschwindigkeit v_0 besitzen konnte, ohne dass dadurch unsere Betrachtungen ungültig würden. Nur die eine Voraussetzung ist dabei selbstverständlich beizubehalten, dass alle Bewegungen und Kräfte in die gleiche Richtung fallen

Die vorige Gleichung kann auch in der Form

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + bt$$

geschrieben werden, die sich sofort nochmals nach t integriren lässt. Wir erhalten

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{bt^2}{2}.$$

Hier ist s_0 eine neue Integrationsconstante, nämlich der Weg, den der Körper bereits zu Anfang der Zeitrechnung (für $t = 0$) zurückgelegt hatte. Gewöhnlich entscheidet man sich dafür, unter s nur jenen Weg zu verstehen, der von dem Augenblicke $t = 0$ an zurückgelegt wurde und dann ist s_0 gleich Null zu setzen. Die Gleichung vereinfacht sich mit dieser Festsetzung zu

$$s = v_0 t + \frac{bt^2}{2}. \tag{12}$$

In ihr erkennen wir, falls wir $v_0 = 0$ setzen, die Ausgangsgleichung (2) des vorigen Paragraphen wieder.

In Gl. (11) kommt s und in Gl. (12) kommt v nicht vor. Für die Auflösung von Aufgaben über die gleichförmig beschleunigte Bewegung ist es bequem, aus der Verbindung

beider Gleichungen mit einander noch zwei neue Gleichungen abzuleiten, in denen b oder t nicht vorkommen. Zu diesem Zwecke lösen wir Gl. (11) zunächst nach b auf und setzen den Werth

$$b = \frac{v - v_0}{t}$$

in Gl. (12) ein. Diese geht dadurch über in

$$s = \frac{v + v_0}{2} t.$$

Ebenso erhalten wir durch Auflösen von Gl. (11) nach t

$$t = \frac{v - v_0}{b}$$

und durch Einsetzen in Gl. (12)

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2b}.$$

Man kann auch noch eine Gleichung ableiten, die v_0 nicht enthält und findet auf demselben Wege

$$s = vt - \frac{bt^2}{2}.$$

Von dieser letzten Gleichung wird indessen seltener Gebrauch gemacht.

§ 6. Die gleichförmig verzögerte Bewegung.

Wenn die Kraft P zur Anfangsgeschwindigkeit v_0 entgegengesetzt gerichtet ist, bringt sie eine Verminderung der Geschwindigkeit hervor, die nach denselben Gesetzen vor sich geht wie das Anwachsen der Geschwindigkeit im vorigen Falle. Zu den Bewegungsvorgängen dieser Art gehört der Wurf eines Steines senkrecht nach oben oder die Bewegung eines gebremsten Eisenbahnzuges, vorausgesetzt dass im letzten Falle die Bremswirkung constant ist.

Aus Gl. (8) wird hier

$$b = -\frac{dv}{dt},$$

und die Gleichungen (11) und (12) ändern sich in

$$v = v_0 - bt; \qquad s = v_0 t - \frac{bt^2}{2}.$$

Man erkennt daraus, dass man alle Formeln des vorigen Paragraphen auch für die gleichförmig verzögerte Bewegung beibehalten kann, wenn man darin nur b negativ setzt. Fassen wir daher nochmals alle Formeln übersichtlich zusammen, so haben wir für die

	gleichf. beschleun. Bewegung	gleichf. verzögerte Bewegung	
α)	$v = v_0 + bt,$	$v = v_0 - bt,$	
β)	$s = v_0 t + \frac{bt^2}{2},$	$s = v_0 t - \frac{bt^2}{2},$	(13)
γ)	$s = \frac{v + v_0}{2} t,$	$s = \frac{v + v_0}{2} t,$	
δ)	$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2b};$	$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2b}.$	

§ 7. Dimensionen und Maasssysteme.

Eine Grösse messen heisst sie mit einer ihr gleichartigen, die als Einheit gewählt ist, vergleichen, um das Verhältniss, in dem sie zu ihr steht, durch eine Zahl auszudrücken. Diese Zahl hat daher nur insofern Bedeutung, als sie auf die gewählte Einheit bezogen wird, d. h. nur als benannte Zahl. Diese zur absoluten Zahl hinzutretende Benennung wird in der Mechanik und überhaupt in der theoretischen Physik die Dimension der gemessenen Grösse genannt. Sie kennzeichnet die Grösse der Art nach.

Die bisher in Betracht gezogenen Grössen waren Längen, Zeiten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen oder Verzögerungen, die beide unter sich von gleicher Art sind, ferner Kräfte und Massen. Die Einheiten dieser Grössen dürfen indessen nicht alle ganz willkürlich gewählt werden. So ist z. B. die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung als jene Strecke definirt worden, die in der Zeiteinheit zurückgelegt wird. Mit der Wahl der Längen- und der Zeiteinheit ist daher zugleich die Einheit für die Geschwindigkeit festgesetzt und ähnlich ist es in anderen Fällen. Jene Einheiten, deren Wahl uns völlig frei steht, pflegt man als Fundamentaleinheiten, die anderen als abgeleitete Einheiten

zu bezeichnen. Dabei ist übrigens wohl zu beachten, dass es unserer Wahl überlassen bleibt, welche Einheiten wir als die fundamentalen und welche wir als die abgeleiteten ansehen wollen. So könnten wir unter den drei Einheiten der Länge, der Zeit und der Geschwindigkeit irgend zwei als Fundamentaleinheiten auswählen, die dritte ist dann eine abgeleitete Einheit. Man hat sich indessen allgemein dafür entschieden, die Längeneinheit und die Zeiteinheit als Fundamentaleinheiten einzuführen und die Geschwindigkeitseinheit daraus abzuleiten und zwar aus dem einfachen Grunde, weil wir Längen und Zeiten sehr bequem unmittelbar messen können, Geschwindigkeiten aber nicht.

Es genügt indessen nicht, die Geschwindigkeitseinheit ganz allgemein als abhängig von der Längen- und der Zeiteinheit zu bezeichnen, sondern man muss auch die Art dieser Abhängigkeit näher zum Ausdrucke bringen. Beachten wir nun, dass die Geschwindigkeit durch Division des zurückgelegten Weges durch die Zeit gefunden wird, so erhalten wir die Dimensionsformel

$$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}. \tag{14}$$

Dadurch, dass eine eckige Klammer um die Grösse v gezogen ist, soll nämlich zum Ausdrucke gebracht werden, dass es sich hier nur um die Einheit oder um die Dimension dieser Grösse handelt. Unter L und T sind dagegen die willkürlich zu wählenden Längen- und Zeiteinheiten zu verstehen. Man vermeidet bei dem Anschreiben der Dimensionsformeln zuweilen gern die Brüche und ersetzt diese durch negative Exponenten, wie es in der zuletzt gewählten Form geschehen ist.

Durch diese Art der Bezeichnung wird namentlich der Vortheil erreicht, dass man von einem Maasssysteme sehr leicht auf ein anderes übergehen kann. Hatte man z. B. vorher eine Geschwindigkeit auf cm und sec bezogen, also etwa

$$v = a\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

gefunden, wobei nun a der Zahlenwerth von v in diesem Maasssysteme ist, so erhält man, wenn später die Längen in

Metern und die Zeiten in Minuten ausgedrückt werden sollen, für dasselbe v

$$v = a\frac{\text{cm}}{\text{sec}} = a\frac{0{,}01\ \text{m}}{\frac{1}{60}\ \text{min}} = 0{,}6\,a \cdot \frac{\text{m}}{\text{min}}\,.$$

Der Umrechnungsfactor 0,6 auf das neue Maasssystem kann demnach aus der Dimensionsbezeichnung $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ ohne Weiteres entnommen werden.

Auch schon bei rein geometrischen Betrachtungen spielen die abgeleiteten Einheiten eine wichtige Rolle. So sieht man als Einheit der Fläche allgemein den Inhalt eines Quadrats an, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist. Wir drücken dies in der von uns gewählten Bezeichnung dadurch aus, dass wir die Dimension einer Fläche gleich L^2, also etwa gleich cm^2 setzen, wenn wir nach cm rechnen. Ebenso ist die Dimension eines Rauminhaltes L^3. Von einer Winkelgrösse sagen wir, dass sie die Dimension Null hat, denn ein Winkel wird bei den Formeln der Mechanik stets durch das Verhältniss zwischen der Länge des Bogens, der zu ihm als Centriwinkel gehört, und der Länge des zugehörigen Halbmessers gemessen. Ein solches Verhältniss ist aber keine benannte, sondern eine absolute Zahl, und dies soll eben dadurch ausgedrückt werden, dass wir die Dimension gleich Null setzen.

Auch die Einheit der Beschleunigung oder Verzögerung wird durch die Längen- und die Zeiteinheit mit bestimmt. Denn man findet die Beschleunigung durch Division des Geschwindigkeitszuwachses, der in einer gewissen Zeit zu Stande kommt, durch diese Zeit. Die Dimension der Beschleunigung ist daher

$$[b] = \frac{[v]}{T} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}. \qquad (15)$$

Die beiden noch übrig bleibenden Einheiten der Kraft und der Masse sind mit den vorigen nicht so verknüpft, dass sie ganz auf sie zurückgeführt werden könnten. Die Kraft steht zwar im Zusammenhange mit der Beschleunigung, die sie hervorbringt; in diese Beziehung tritt aber ausserdem noch die Masse ein. Es bleibt daher nichts übrig, als noch eine

dritte Fundamentaleinheit einzuführen, und zwar bleibt es uns, wie vorher, überlassen, welche von beiden wir dazu wählen wollen. Während aber im früheren Falle kein Zweifel darüber bestehen konnte, dass sich die Längen- und die Zeiteinheit am besten als Fundamentaleinheiten eignen, sind hier die Meinungen getheilt, und in der That laufen heute zwei ganz verschiedene Maasssysteme ziemlich unabhängig neben einander her, von denen das eine die Kraft-, das andere die Masseneinheit als Fundamentaleinheit benützt.

Das ältere von beiden Maasssystemen ist auf die Wahl der Krafteinheit als Fundamentalmaass begründet. Die ursprüngliche Definition von 1 Kilogramm ist die des Gewichtes von 1 cdm Wasser im Zustande grösster Dichte bei normalem Druck. Später hat man dafür das Gewicht eines gewissen in den Archiven aufbewahrten Platinstücks gesetzt, das so bemessen wurde, dass es nach genauen Versuchen jenem Wasserwürfel die Wage hielt. Noch später verstand man aber unter einem Kilogramm nicht mehr das Gewicht, sondern die Masse jenes Urgewichtsstücks. Der Grund für den Wechsel ist leicht einzusehen. Das deutsche Urkilogramm wurde mit dem französischen in Paris durch Abwägen verglichen. Als es dann nach Berlin gebracht wurde, behielt es zwar seine Masse; das Gewicht änderte sich aber ein wenig, weil die Fallbeschleunigung in Berlin etwas grösser ist, als in Paris. In der That stellt auch nach dem Wortlaute der Gesetzesbestimmungen das Urkilogramm die Einheit der Masse dar. Das Wort Kilogramm hat demnach zwei ganz verschiedene und sorgfältig auseinander zu haltende Bedeutungen, je nachdem man es als Einheit der Masse oder als Einheit des Gewichts, d. h. als Krafteinheit gebraucht.

Unserem Gefühl entspricht es zunächst ohne Zweifel am besten, wenn man das Kilogramm als Krafteinheit deutet. Denn wir sind gewohnt, ein Gewichtsstück dadurch einer ungefähren Schätzung zu unterwerfen, dass wir es aufheben und die Kraftäusserung abschätzen, die wir hierfür aufwenden müssen. Wenn die Fallbeschleunigung überall auf der Erde

denselben Werth hätte, wäre man davon sicherlich niemals abgegangen. Als es aber nöthig geworden war, bei genauen Messungen von Kräften, die an verschiedenen Orten der Erde ausgeführt wurden, auf die Veränderlichkeit der Schwere Rücksicht zu nehmen, um die Resultate vergleichbar mit einander zu machen, empfahl es sich, zu der anderen Definition des Kilogramms überzugehen, die jede Vieldeutigkeit ausschloss.

Das auf das Kilogramm als Krafteinheit gegründete Maasssystem hat seinen Ursprung, wie das ganze metrische System überhaupt, in Frankreich. Dort ist es heute selbst bei den Physikern noch häufig im Gebrauch. Ausserdem wird es überwiegend von den Technikern bis auf den heutigen Tag benutzt, jedoch mit Ausnahme der Elektrotechniker, die sich meistens dem anderen Maasssysteme angeschlossen haben. Dieses zweite Maasssystem, das die Masseneinheit als Fundamentaleinheit annimmt, wurde zuerst von den deutschen Gelehrten Gauss und Wilhelm Weber aufgestellt. Es ist heute bei den Physikern fast aller Länder das herrschende geworden und wird von diesen gewöhnlich als das absolute Maasssystem bezeichnet. Dass sich die Elektrotechniker dieser Wahl angeschlossen haben, ist hauptsächlich darauf zurückzuführen, dass sich die Elektrotechnik als besonderer Wissenszweig von der allgemeinen Physik erst zu einer Zeit abzweigte, als das sogenannte absolute Maasssystem in dieser schon allgemein zur Einführung gelangt war. — Ich selbst halte es für wahrscheinlich, dass man später auch in der Technik allgemein zu dem physikalischen Maasssysteme übergehen wird. Voraussichtlich wird dies aber noch sehr lange Zeit in Anspruch nehmen, und in der Zwischenzeit bleibt für den Techniker nichts Anderes übrig, als sich mit den Grundlagen beider Maasssysteme vertraut zu machen. In meinen Vorlesungen werde ich daher beide Systeme gelegentlich neben einander gebrauchen; in der Regel werde ich mich aber des „französischen“ oder „technischen“ Maasssystems bedienen, da dieses heute noch in der Technik bei Weitem überwiegt.

Hierbei erwähne ich noch, dass sich die Physiker heute

ganz allgemein auch darüber geeinigt haben, die Zeiten stets nach Secunden, die Längen nach Centimetern und die Massen nach Grammen (also nicht nach Kilogrammen) auszumessen. Gauss und Weber benutzten anstatt dessen Millimeter und Milligramm. Indessen ist der blosse Uebergang zu einem Vielfachen der Fundamentaleinheiten natürlich verhältnissmässig nebensächlich gegenüber der Wahl einer Fundamentaleinheit von ganz anderer Art. Das physikalische Maasssystem, wie es heute gebraucht wird, führt mit Rücksicht auf die getroffene Wahl auch den Namen Centimeter-Gramm-Secunden-System, gewöhnlich abgekürzt C. G. S. geschrieben.

Der Zusammenhang zwischen den Dimensionen der Kraft und der Masse geht aus der dynamischen Grundgleichung hervor. Nach dieser ist (vgl. Gl. 6)

$$P = mb,$$

also auch

$$[P] = [m] \cdot [b],$$

wobei die Dimension der Beschleunigung aus Gl. (15) eingesetzt werden kann. Im französischen oder technischen Maasssysteme ist die Krafteinheit die dritte Fundamentaleinheit: sie mag mit K bezeichnet werden. Dann hat man als Dimension der Masseneinheit

$$[m] = KL^{-1}T^2. \tag{16}$$

Umgekehrt ist im „physikalischen“ oder „deutschen“ Maasssysteme die Masseneinheit die dritte Grundeinheit — und als solche sei sie mit M bezeichnet. Dann ist die Krafteinheit eine abgeleitete Einheit und man hat dafür

$$[P] = MLT^{-2}. \tag{17}$$

Am anschaulichsten wird der erhebliche Unterschied zwischen beiden Maasssystemen dadurch hervortreten, dass ich die dynamische Grundgleichung auf das Gewicht und die Masse eines Kilogramms anwende. Hiernach ist

$$1 \text{ kg Gewicht} = 1 \text{ kg Masse} \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} \cdot$$

Was unter dem kg in jedem Falle verstanden wird, ist in dieser Gleichung durch die besondere Benennung ersichtlich

gemacht. Im technischen Maasssystem ist demnach die Masse des Urkilogramms

$$1 \text{ Massen-kg} = \frac{1 \text{ Gewichts-kg}}{981} \cdot \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}} = \frac{1 \text{ Gewichts-kg}}{9{,}81} \cdot \frac{\text{sec}^2}{\text{m}}$$

gegeben und im physikalischen Maasssysteme ist umgekehrt das Gewicht des Urkilogramms durch die Gleichung

$$1 \text{ Gewichts-kg} = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \cdot 1 \text{ Massen-kg}$$

bestimmt.

Um Verwechselungen zu entgehen, die wegen der Zweideutigkeit der Bezeichnung Kilogramm (oder Gramm) sonst leicht entstehen, ist es nützlich, wenn man für die abgeleitete von den beiden Einheiten einen besonderen Namen gebraucht, der Missverständnisse ausschliesst. Leider fehlt im technischen Maasssysteme ein besonderer Name für die abgeleitete Masseneinheit. Dagegen gebraucht man im C. G. S.-Systeme eine besondere Bezeichnung für die abgeleitete Krafteinheit. Nach dem dynamischen Grundgesetze wird die Kraft P zu Eins, wenn $m = 1$ und $b = 1$ ist; also

$$[P] = 1 \text{ g Masse} \cdot 1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

und die so definirte abgeleitete Krafteinheit heisst ein Dyn. Es ist also jene Kraft, die einem Gramm Masse die Beschleunigung von 1 cm, auf die Secunde bezogen, ertheilt. Der Vergleich mit der technischen Krafteinheit gestaltet sich hiernach wie folgt

$$1 \text{ Gewichts-g} = 981 \text{ dyn}$$

oder

$$1 \text{ Gewichts-kg} = 981\,000 \text{ dyn.}$$

Genau gilt diese Beziehung indessen nur an solchen Stellen der Erde, für die die Fallbeschleunigung $981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ beträgt. Eine Million Dynen bezeichnet man auch als ein Megadyn; man kann daher sagen, dass das Gewichts-kg des Technikers etwas weniger als ein Megadyn des Physikers ist. Sein genauer Werth wechselt mit dem Orte auf der Erde. Dagegen ist das dyn unabhängig von dem Orte; es würde auf dem

Monde oder auf einem anderen Planeten, wenn dort Wesen wohnten, mit denen wir uns verständigen könnten, genau in demselben Sinne gebraucht werden können wie bei uns und es wäre uns möglich, diesen Wesen, wenn wir etwa eine telegraphische Verbindung mit ihnen hätten, genau zu bezeichnen, was wir unter 1 dyn verstehen, so dass sie nachher im Stande wären, die Kräfte auf ihrem Planeten ebenfalls nach unseren Dynen auszumessen. Voraussetzung wäre nur, dass dort Wasser oder ein anderer Körper in demselben Zustande wie auf der Erde vorkäme und dass sie im Stande wären, astronomische Beobachtungen, behufs Feststellung unserer Längen- und Zeiteinheit ebenso genau auszuführen, als wir dies vermögen. Aus diesen Gründen hat das physikalische Maasssystem die Bezeichnung des absoluten Maasssystems erhalten.

Es möge noch bemerkt werden, dass man im Bereiche der Mechanik mit drei Fundamentaleinheiten vollständig auskommt. Die Einheiten aller übrigen Grössen, die in der Mechanik auftreten, sind abgeleitete Einheiten. Man nimmt heute meistens an, dass es in Zukunft gelingen wird, auch alle in anderen Zweigen der Physik auftretenden Grössen auf die drei Grundeinheiten der Mechanik einwandfrei zurückzuführen. Bisher ist dies aber noch nicht vollständig geglückt. So tritt in der Elektricitätslehre heute noch eine vierte Fundamentaleinheit auf, deren Wahl willkürlich ist. In der That hat man auch dort diese Wahl auf verschiedene Art getroffen und unterscheidet danach verschiedene elektrische Maasssysteme. Auch über die Dimension, die man der Temperatur in der Wärmelehre beizulegen hat, herrscht noch keine Einstimmigkeit. Auf diese Dinge kann ich aber im Rahmen dieser Vorlesungen nicht näher eingehen.

Auf einen Umstand soll aber noch einmal nachdrücklich hingewiesen werden, nämlich, dass zwei physikalische Grössen nur dann als gleich angesehen werden können, wenn sie nicht nur gleiche Maasszahlen, sondern auch gleiche Benennungen (oder Dimensionen) haben. Man kann auch nur gleich benannte Grössen zu einander addiren oder sie von einander subtrahiren.

Daraus folgt, dass in einer Gleichung der Mechanik oder der theoretischen Physik beide Seiten und auch alle durch Plus- oder Minuszeichen mit einander verbundenen Glieder die gleiche Dimension haben müssen. Eine Gleichung, bei der dies nicht zuträfe, müsste nothwendig falsch sein und in der That besteht darin ein sehr einfaches Prüfungsverfahren, das man nach Durchführung einer längeren Rechnung stets anwenden sollte, um etwa vorgekommene Fehler aufzufinden. Nicht jeder Rechenfehler, den man begeht, beeinflusst zwar die Dimensionen der vorkommenden Ausdrücke und man hat daher keine Sicherheit, dass die Rechnung richtig ist, wenn jene Probe stimmt. Gewöhnlich findet man aber die Fehler auf diesem Wege heraus und da die Probe sehr schnell und bequem ausgeführt werden kann, ist sie sehr werthvoll.

§ 8. Die ungleichförmig beschleunigte gradlinige Bewegung.

Für eine solche Bewegung kann die Fragestellung nach zwei entgegengesetzten Richtungen hin erfolgen. Entweder nämlich ist der Ablauf der Bewegung in der Zeit von vornherein (etwa auf Grund von Beobachtungen) gegeben und man soll die Grösse der Kraft ermitteln, die in jedem Augenblicke auf den materiellen Punkt übertragen wird; oder man kennt umgekehrt die Kraft und soll danach schliessen, wie die Bewegung unter ihrem Einflusse erfolgen muss. In beiden Fällen führt die dynamische Grundgleichung

$$P = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

zur Lösung der Aufgabe; im ersten Falle durch Ausführung der Differentiation an dem als Funktion der Zeit bekannten Wege s und im zweiten Falle durch Integration der Gleichung.

Der erste Fall macht niemals irgend welche Schwierigkeiten; etwas verwickelter ist die Lösung im zweiten Falle und dafür soll hier ein das ganze Vorgehen näher erläuterndes Beispiel gegeben werden. Vorher sind die Fallgesetze ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes besprochen worden und

jetzt wollen wir diese Betrachtung auf den Fall ausdehnen, dass der Luftwiderstand so gross ist, dass er nicht mehr vernachlässigt werden kann. Um den Verlauf der Fallbewegung unter diesen Umständen vorausberechnen zu können, müssen wir wissen, in welcher Weise sich der Luftwiderstand geltend macht. Dies konnte anfänglich nur inductiv, also aus der Beobachtung der wirklichen Fallbewegung geschlossen werden. Aus diesen Beobachtungen wurde der Schluss gezogen, dass der Luftwiderstand bei sehr kleinen Geschwindigkeiten unmerklich ist und mit der Geschwindigkeit anwächst. Schon von Newton rührt auf Grund solcher Betrachtungen die Annahme her, dass der Luftwiderstand für einen Körper von gegebener Grösse und Gestalt der Oberfläche proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ist. Diese Annahme wird auch heute noch in der Regel der deductiven Ableitung des Fallgesetzes im „widerstehenden Mittel“ (das ausser Luft auch Wasser oder eine andere Flüssigkeit sein kann) zu Grunde gelegt. Im Gegensatze zu anderen Ansätzen der Mechanik, die wir als streng gültig ansehen können, ist diese Annahme aber nur ungefähr und nur für die gewöhnlich vorkommenden Geschwindigkeiten genau genug richtig. Bei ganz kleinen Geschwindigkeiten kommt man dem wirklichen Verhalten näher, wenn man den Widerstand des Mittels der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional setzt und bei Geschwindigkeiten, die sich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles nähern, wächst der Widerstand noch schneller als mit der zweiten Potenz. Wenn wir solche Fälle ausdrücklich ausschliessen und nur Bewegungen mit Endgeschwindigkeiten von etwa einem Meter bis zu etwa 100 oder 200 Metern in der Secunde betrachten, finden wir jedoch die aus dem quadratischen Gesetz abgeleitete Formel für praktische Zwecke hinreichend genau durch die Erfahrung bestätigt.

An einem Körper, der durch die Luft herabfällt, haben wir jetzt zwei Kräfte von entgegengesetzter Richtung ins Auge zu fassen. Die eine ist, wie früher, das nach abwärts beschleunigende Gewicht Q, die andere der Luftwiderstand, den

wir nach dem quadratischen Gesetze gleich kv^2 setzen können, wo nun k eine Constante des Körpers ist, die von der Grösse und Gestalt der Oberfläche, sowie von der Beschaffenheit des Mittels, in dem er sich bewegt, abhängt. Diese wirkt dem Gewichte entgegen und für die wirklich erfolgende Bewegung ist daher nur der Unterschied zwischen beiden in Ansatz zu bringen. Die im gegebenen Augenblicke an dem Körper im Ganzen auftretende beschleunigende Kraft P ist daher

$$P = Q - kv^2 \tag{18}$$

und die dynamische Grundgleichung, die wir hier in der Form

$$P = m\frac{dv}{dt}$$

anschreiben, liefert

$$m\frac{dv}{dt} = Q - kv^2.$$

Beachten wir noch, dass $Q = mg$ gesetzt werden kann und schreiben wir zur Abkürzung den constanten Werth

$$\frac{k}{m} = k',$$

so vereinfacht sich dies zu

$$\frac{dv}{dt} = g - k'v^2.$$

Um aus dieser Differentialbeziehung v als Function von t zu finden, formen wir die Gleichung um zu

$$dt = \frac{dv}{g - k'v^2},$$

in der die Veränderlichen getrennt sind. Wenn die Differentialausdrücke gleich sein sollen, dürfen sich auch ihre unbestimmten Integrale nur um eine constante Grösse von einander unterscheiden. Durch Integration erhalten wir daher

$$t = C + \int \frac{dv}{g - k'v^2}.$$

Die Integration kann nach den Regeln der höheren Mathematik ohne Weiteres ausgeführt werden; man findet dann

$$t = C + \frac{1}{2\sqrt{gk'}} \lg \frac{\sqrt{gk'} + k'v}{\sqrt{gk'} - k'v}.$$

Die Integrationsconstante C ist vorläufig unbekannt; wir finden aber ihren Werth aus den Anfangsbedingungen, die bei der Stellung der Aufgabe mit gegeben sind. Nehmen wir hier an, dass die Bewegung vom Zustande der Ruhe aus beginnt, dass also zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit $v = 0$ ist, so folgt, dass wir in der vorausgehenden Gleichung auch $C = 0$ setzen müssen, damit beide Seiten der Gleichung zu Anfang gleichen Werth miteinander haben. Nachdem dies geschehen ist, gestattet uns die vorstehende Gleichung bereits, die Zeit zu berechnen, die verstreichen muss, bis der Körper eine bestimmte Geschwindigkeit v erlangt hat. Wir sehen auch, dass die Geschwindigkeit v niemals den Werth

$$v_{max} = \sqrt{\frac{g}{k'}}$$

überschreiten kann und dass sie sich diesem Grenzwerthe bei unendlich wachsendem t nähert. Gewöhnlich wird aber verlangt, v unmittelbar als Function von t darzustellen und zu diesem Zwecke ist es nöthig, die vorige Gleichung nach v aufzulösen, was leicht ausgeführt werden kann. Man erhält dann

$$v = \sqrt{\frac{g}{k'}} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{gk'}} - 1}{e^{2t\sqrt{gk'}} + 1}. \tag{19}$$

Auch der Weg s wird hieraus ohne Schwierigkeit als Function von t gefunden, indem man beachtet, das $v = \frac{ds}{dt}$ ist und den vorstehenden Ausdruck nach t integrirt. Zur Bestimmung der hierbei auftretenden neuen Integrationsconstanten dient die Bemerkung, dass $s = 0$ ist für $t = 0$. Man findet so

$$s = \frac{1}{k'}\left\{\lg \frac{e^{2t\sqrt{gk'}} + 1}{2} - t\sqrt{gk'}\right\}. \tag{20}$$

Dass die Integration und die Bestimmung der Integrationsconstanten richtig ausgeführt wurde, folgt nachträglich leicht daraus, dass man bei Differentiation von Gl. (20) wieder auf Gl. (19) zurückkommt und dass ferner Gl. (20) für $t = 0$ in der That $s = 0$ liefert, wie es der Anfangsbedingung entspricht.

Die Constante k kann nur aus Versuchen ermittelt werden

und aus ihr folgt dann k'. Die Dimension von k folgt daraus, dass k mit dem Quadrate einer Geschwindigkeit multiplicirt eine Kraft liefert, also im technischen Maasssystem zu $KL^{-2}T^2$. Um eine Vorstellung davon zu geben, wie gross der numerische Werth von k beim Falle durch die Luft ausfällt, erwähne ich, dass ungefähr

$$k = 0{,}12 \text{ kg m}^{-2} \text{sec}^2$$

ist, wenn die beim Falle vorausgehende Fläche des fallenden Körpers 1 qm gross, eben und senkrecht zur Fallrichtung ist. Bei einer anderen Grösse der Fläche ist k dem Flächeninhalte proportional; bei anderer Gestalt der Fläche ändert sich k ebenfalls, worauf aber jetzt nicht weiter eingegangen werden soll.

Die Dimension von k' folgt aus der von k durch Division mit einer Masse, also im technischen Maasssysteme nach Gl. (16)

$$[k'] = \frac{KL^{-2}T^2}{KL^{-1}T^2} = \frac{1}{L}.$$

Hiernach hat $2t\sqrt{gk'}$ die Dimension Null, d. h. es ist eine absolute Zahl. Der Exponent einer Exponentialgrösse, ebenso auch ein Werth, von dem der Sinus oder eine andere goniometrische Function in einer Gleichung der Mechanik vorkommt, kann immer nur eine absolute Zahl sein. Dies bestätigt die Richtigkeit der Gleichungen (19) und (20), die auch bei weiterem Einsetzen der Dimensionen als homogen in Bezug auf die Dimensionen erkannt werden.

Ausserdem kann man die Gültigkeit der Gleichungen (19) und (20) auch noch einer anderen nachträglichen Probe unterwerfen. Wenn nämlich k und hiermit auch k' zu Null werden, kommen wir wieder auf die Fallbewegung ohne Luftwiderstand zurück. Die Formeln müssen also auch die früheren einfacheren mit in sich enthalten. Zunächst liefern beide Gleichungen für $k' = 0$ den Werth $\frac{0}{0}$. Um den wirklichen Werth dieses unbestimmten Ausdrucks zu ermitteln, denken wir uns z. B. in Gl. (20) zunächst $\sqrt{k'}$ unendlich klein. Mit Vernachlässigung unendlich kleiner Glieder höherer Ordnung wird dann nach Entwickelung der Exponentialgrösse in eine Reihe

$$e^{2t\sqrt{gk'}} = 1 + 2t\sqrt{gk'} + 2t^2gk'$$

und mit Berücksichtigung der Reihenentwickelung

$$\lg(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$$

finden wir, gleichfalls unter Beiseitelassung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung,

$$\lg\frac{e^{2t\sqrt{gk'}} + 1}{2} = \lg(1 + t\sqrt{gk'} + t^2gk') = t\sqrt{gk'} + t^2gk' - \frac{1}{2}t^2gk'.$$

Setzen wir dies in Gl. (20) ein, so finden wir in der That

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

also die Formel für die Fallbewegung ohne Luftwiderstand, wie wir es erwarten mussten. — Auch diese Prüfung der Ergebnisse einer verwickelten Betrachtung durch Zurückgehen auf einen darin mit enthaltenen einfacheren Fall findet in der Mechanik sehr häufig Anwendung.

Auch dann, wenn k' nicht sehr klein ist, kann für sehr kleine Werthe von t die vorige Entwickelung beibehalten werden, d. h. die Fallbewegung erfolgt zu Anfang so wie im luftleeren Raume und erst späterhin treten grössere Abweichungen davon ein. Bei sehr grossen Werthen von t wird schliesslich v nahezu constant; der Luftwiderstand hebt dann das Gewicht, abgesehen von einer sehr kleinen Differenz, gerade auf. In diesem Bewegungszustande befindet sich z. B. ein Fallschirm, der von einem Luftballon herabgelassen wird, schon nach ziemlich kurzer Zeit, weil bei ihm k' in Folge der grossen Oberfläche im Vergleiche zum Gewichte sehr gross ist.

§ 9. Arbeit und lebendige Kraft.

Die vierte von den Gleichungen (13) für die gleichförmig beschleunigte Bewegung lautete

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2b}.$$

Multiplicirt man beiderseits zuerst mit b und dann auch noch mit der Masse m und beachtet man, dass das Product aus

Masse und Beschleunigung gleich der Kraft P ist, so geht die Gleichung über in

$$Ps = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \tag{21}$$

Das Product Ps aus Kraft und Weg wird die Arbeit der Kraft, das halbe Product aus der Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit wird die lebendige Kraft des materiellen Punktes genannt. In Worten spricht man daher Gl. (21) dahin aus, dass die Arbeit der Kraft bei einer gradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung gleich dem Zuwachse an lebendiger Kraft ist, den der materielle Punkt zur gleichen Zeit erfährt.

Für die lebendige Kraft gebraucht man häufig die neueren Bezeichnungen „kinetische Energie“ oder auch „Wucht“. Das letzte Wort ist ohne Zweifel sehr gut gewählt; es hat sich aber bisher noch nicht recht einbürgern können. An und für sich lässt sich indessen auch gegen die alte Bezeichnung „lebendige Kraft“ wohl nicht allzuviel einwenden, falls man sich nur stets in Erinnerung hält, dass die lebendige Kraft eine Grösse von ganz anderer Art (und auch von anderer Dimension) als die beschleunigende Kraft ist. Es ist freilich mit dem Gebrauche des Wortes noch der Missstand verbunden, dass Leibnitz, der das Wort einführte, darunter mv^2 und nicht wie wir die Hälfte davon verstand. Im Sinne von Leibnitz ist das Wort bis in dieses Jahrhundert hinein gebraucht worden und vereinzelt wird es selbst jetzt noch so gebraucht. Derartigen Missverständnissen entgeht man vollständig, wenn man eine der beiden anderen Bezeichnungen wählt; indessen wird heute in der deutschen technischen Litteratur die lebendige Kraft immer nur als gleichbedeutend mit Wucht gebraucht und es steht daher der Anwendung des Wortes kein besonderes Bedenken entgegen.

Die vorige Ableitung von Gl. (21) knüpft an die Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung an. Der Satz gilt aber viel allgemeiner, wie hier zunächst für die beliebig ungleichförmig beschleunigte, aber immer noch gradlinige Bewegung gezeigt werden soll.

Aus der Definition der Geschwindigkeit und der Beschleunigung folgen die beiden Gleichungen

$$vdt = ds \qquad \text{und} \qquad dv = bdt.$$

Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander und hebt den Factor dt auf beiden Seiten gegen einander weg, so bleibt

$$vdv = bds,$$

wofür nach Multiplication mit m auch

$$md\left(\frac{v^2}{2}\right) = Pds$$

geschrieben werden kann, denn die Ausführung des Differentials von $\frac{v^2}{2}$ liefert sofort wieder vdv. Da m eine constante Grösse ist, kann es übrigens auch mit unter das Differentialzeichen als Factor gesetzt werden. Die so gewonnene Gleichung

$$Pds = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \tag{22}$$

spricht bereits den Satz von der lebendigen Kraft für den Vorgang während eines unendlich kleinen Wege- und Zeitelements aus. Man braucht sich nur die Gleichung für alle Elemente, in die sich eine endliche Bewegung zerlegen lässt, angeschrieben und dann alle summirt zu denken, um die Form des Satzes für einen endlichen Weg zu erhalten. Auf der linken Seite tritt hierbei die Summe aller Elementararbeiten Pds auf, die als die gesammte Arbeitsleistung der ihrer Grösse nach veränderlichen Kraft P bezeichnet wird. Für constantes P folgt daraus wieder wie vorher Ps; andernfalls aber muss die Summirung auf irgend eine Art angedeutet werden und man wählt dazu in der Regel ein Integralzeichen, aus Gründen, die dem Kenner der Integralrechnung ohne Weiteres klar sind.

Auf der rechten Seite der Gleichung (22) steht das Differential der lebendigen Kraft. Wenn man die Summirung über alle Differentiale ausführt, kommt man damit auf die endliche Differenz zwischen Anfangs- und Endwerth der lebendigen Kraft. Durch Ausführung der Summirung erhält man demnach aus Gl. (22)

$$\int P ds = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \tag{23}$$

Von Gl. (21) weicht diese Aussage nur insofern ab, als für die Arbeit der Kraft ein allgemeinerer Ausdruck eingetreten ist. Wegen der besonderen Form dieses Ausdrucks pflegt man die Arbeit auch als das Linienintegral der Kraft zu bezeichnen, eine Benennung, die namentlich in der Elektricitätslehre neuerdings sehr gebräuchlich geworden ist.

§ 10. Antrieb und Bewegungsgrösse.

Aus der dynamischen Grundgleichung in der Form

$$P = m \frac{dv}{dt}$$

folgt durch Multiplication mit dem Zeitelemente dt

$$P dt = m dv = d(mv),$$

da der constante Factor m auch mit unter das Differentialzeichen aufgenommen werden kann. Diese Gleichung spricht schon den Satz vom Antriebe für ein Zeitelement aus. Um daraus eine Gleichung in endlicher Form zu gewinnen, denke ich mir für jedes der Zeitelemente, in die man die ganze Dauer des Bewegungsvorgangs zerlegen kann, eine solche Gleichung angeschrieben und alle addirt. Wir erhalten dann, ganz ähnlich wie im vorigen Paragraphen

$$\int P dt = mv - mv_0. \tag{24}$$

Links steht jetzt das „Zeitintegral“ der Kraft und dieses bezeichnet man als den Antrieb oder auch als den Impuls der Kraft. Das Product mv aus Masse und Geschwindigkeit wird die Bewegungsgrösse des materiellen Punktes genannt. Gl. (24) kann dann dahin ausgesprochen werden, dass der Antrieb der Kraft bei irgend einer gradlinigen Bewegung gleich dem Zuwachse der Bewegungsgrösse ist.

Von diesem Satze wird namentlich bei der Untersuchung des Stosses Gebrauch gemacht. Er stellt ebenso wie der Satz

von der lebendigen Kraft nur eine andere, für die betreffenden Anwendungen bequemere Aussageform der dynamischen Grundgleichung dar.

§ 11. Krummlinige Bewegung des materiellen Punktes.

Bei der gradlinigen Bewegung konnte die augenblickliche Lage des bewegten Punktes durch eine einzige Zahlenangabe, nämlich durch Angabe der Länge des von Anbeginn an zurückgelegten Weges beschrieben werden. Bei der krummlinigen Bewegung bedürfen wir dazu im Allgemeinen drei Zahlenangaben, nämlich die Angabe der drei Coordinaten des Punktes in Bezug auf irgend ein räumliches Coordinatensystem oder anstatt dessen auch die Angabe einer gerichteten Grösse. Hier werde ich in der Regel dem letzten Verfahren den Vorzug geben, weil es den Blick unmittelbar auf das hinlenkt, worauf es ankommt. Indessen lässt sich die eine Darstellung sehr leicht auf die andere zurückführen.

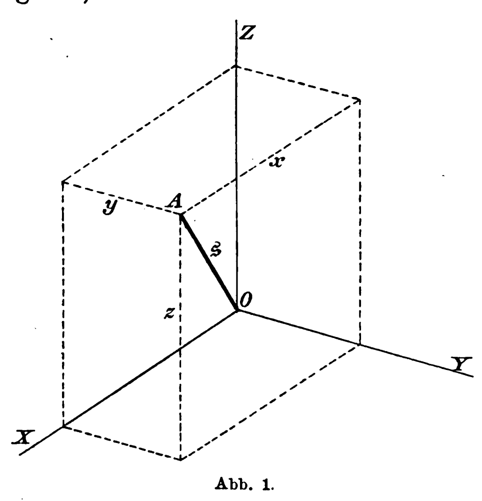


Abb. 1.

In Abb. 1 sei A die augenblickliche Lage des bewegten Punktes. Diese lässt sich von einem festen Anfangspunkt O aus durch Angabe der gerichteten Strecke — des Radiusvectors — $\mathfrak{s}$ bestimmen. Projicirt man $\mathfrak{s}$ auf die drei durch den Punkt O gezogenen rechtwinkligen Coordinatenaxen OX, OY, OZ, so erhält man die Coordinaten xyz. Bei den Coordinaten ist die Richtung selbstverständlich; man sieht daher xyz als richtungslose Grössen an. Andererseits ist es aber natürlich auch zulässig, die Richtungen besonders hervorzuheben und man kann

dies bei der Coordinate x z. B. dadurch bewirken, dass man ihr einen Richtungsfactor beigibt, also z. B. $\mathfrak{i}x$ dafür schreibt. Dieser Richtungsfactor $\mathfrak{i}$ soll die Dimension Null und den Werth 1 haben. Durch Multiplication mit ihm wird daher weder an der Dimension noch an dem numerischen Werthe des Products eine Aenderung herbeigeführt; nur eine bestimmte Richtung wird dem Producte dadurch zugeschrieben. Die Richtungsfactoren für die Y- und die Z-Axe bezeichnen wir mit $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$. Schon durch die Schreibweise ist hervorgehoben, dass diese Factoren gerichtete Grössen bedeuten. Wir können anstatt dessen für $\mathfrak{i}x$ auch einfach $\mathfrak{x}$ u. s. f. schreiben und haben dann zur Erläuterung des Sinnes, in dem wir die Richtungsfactoren gebrauchen, die Gleichungen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{i}x; \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{j}y; \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{k}z.$$

Denkt man sich von O aus zuerst $\mathfrak{i}x$ abgetragen, am Endpunkte dieser Strecke $\mathfrak{j}y$ und hierauf wiederum $\mathfrak{k}z$ angereiht, so gelangen wir zum Punkte A. Man sieht auch aus Abb. 1 sofort, dass es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge wir diese gerichteten Strecken aneinander tragen; nachdem alle drei in beliebiger Aufeinanderfolge zu einem polygonalen Zuge zusammengesetzt sind, treffen wir stets wieder auf den Punkt A. Man kann dies auch dahin ausdrücken, dass es gleichgültig ist, ob wir vom Anfangspunkte O aus unmittelbar um die gerichtete Strecke $\mathfrak{s}$ weiter gehen, oder ob wir nacheinander die drei Verschiebungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ausführen. Diese Art der Zusammensetzung gerichteter Grössen spielt in vielen Theilen der Mechanik eine wichtige Rolle. Man hat daher eine anschauliche Bezeichnung dafür eingeführt und nennt $\mathfrak{s}$ die geometrische oder auch die graphische Summe der Strecken $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$. In Form einer Gleichung kann man den Zusammenhang der vier Strecken dadurch zum Ausdrucke bringen, dass man

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z \tag{25}$$

setzt und unter dem Pluszeichen, durch das die Glieder verbunden sind, die Vorschrift für die geometrische Summirung

versteht. Ein Pluszeichen zwischen zwei gerichteten Grössen ist immer nur in diesem Sinne aufzufassen. Haben beide Vectoren zufällig gleiche Richtung, so geht die geometrische Summirung in die gewöhnliche, haben sie entgegengesetzte Richtung, so geht sie in die algebraische Summirung über. Eine gerichtete Grösse und eine richtungslose können in der Mechanik niemals durch ein Pluszeichen miteinander verbunden werden, da eine solche Summirung überhaupt keinen physikalischen Sinn hätte. Zu irgend welchen Missverständnissen kann daher die Uebertragung des Pluszeichens der Algebra auf das Rechnen mit gerichteten Grössen in diesem erweiterten Sinne niemals Veranlassung geben.

Treten in einer geometrischen Summe Glieder auf, die mit einem Minuszeichen behaftet sind, so bedeutet dies, dass sie mit umgekehrter Richtung in den polygonalen Zug aufzunehmen sind, durch den man die geometrische Summe erhält. Da die Reihenfolge der Summirung gleichgültig ist, bleibt eine Gleichung zwischen gerichteten Grössen immer noch richtig, wenn man beiderseits denselben Vector zufügt oder ihn subtrahirt; kurzum, wir können uns, so lange nur Additionen und Subtractionen oder auch Multiplicationen mit richtungslosen Grössen in Frage kommen, beim Rechnen mit gerichteten Grössen ganz an die gewöhnlichen algebraischen Sätze halten.

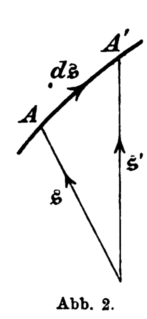
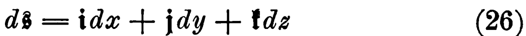


Abb. 2.

Nach dem Verlaufe der Zeit dt wird der bewegte materielle Punkt in eine benachbarte Lage A' übergegangen sein. Auch den unendlich kleinen Weg AA' wollen wir als gerichtete Grösse auffassen und ihn, um dies zum Ausdrucke zu bringen, mit $d\mathfrak{s}$ bezeichnen. Die Projectionen auf die Coordinatenaxen bezeichnen wir mit dx, dy, dz, so dass



$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{i}dx + \mathfrak{j}dy + \mathfrak{k}dz \tag{26}$$

ist. Der Radiusvector $\mathfrak{s}'$ des Punktes A' wird aus $\mathfrak{s}$ gefunden, indem man am Endpunkte von $\mathfrak{s}$ den Vector $d\mathfrak{s}$ anträgt, d. h. nach dem Begriffe der geometrischen Summe ist

$$\mathfrak{s}' = \mathfrak{s} + d\mathfrak{s}$$

und hierdurch rechtfertigt es sich, dass wir den Weg AA' als das geometrische Differential des Radiusvectors $\mathfrak{s}$ ansehen.

Wir fanden schon früher, dass man die Grösse der Geschwindigkeit in einem gegebenen Augenblicke als Grenzwerth des Verhältnisses zwischen dem durchlaufenen Wegelemente und dem inzwischen verstrichenen Zeitelemente erhält. Bei der krummlinigen Bewegung genügt es aber nicht, die Geschwindigkeit nur der Grösse nach anzugeben; man muss auch die Richtung bezeichnen, nach der die Bewegung im gegebenen Augenblicke vor sich geht. Diese wird durch die Tangente der Bahn oder auch durch die Richtung des Bahnelementes AA' bezeichnet. Wir bekommen demnach die Geschwindigkeit sowohl der Grösse als der Richtung nach, wenn wir

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{s}}{dt} \tag{27}$$

setzen. Zerlegen wir $d\mathfrak{s}$ in seine drei Componenten nach Gl. (26), so geht Gleichung (27) über in

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{i}\frac{dx}{dt} + \mathfrak{j}\frac{dy}{dt} + \mathfrak{k}\frac{dz}{dt} \tag{28}$$

und hierdurch ist $\mathfrak{v}$ zugleich als geometrische Summe von drei in den Richtungen der Coordinatenaxen gezählten Componenten dargestellt. Wenn wir die Componenten von $\mathfrak{v}$ ihrer Grösse nach ausserdem noch mit $v_1 v_2 v_3$ bezeichnen, so haben wir demnach

$$v_1 = \frac{dx}{dt}; \quad v_2 = \frac{dy}{dt}; \quad v_3 = \frac{dz}{dt} \tag{29}$$

einen Gleichungssatz, in dem die Richtungen als selbstverständlich nicht besonders hervorgehoben sind.

Auch der Begriff der Beschleunigung, der früher bei der Betrachtung der gradlinigen Bewegung gewonnen wurde, ist jetzt sinngemäss auf die krummlinige Bewegung zu übertragen. Wir müssen dabei daran festhalten, dass die Beschleunigung das Maass für die Aenderung der Geschwindigkeit bildet. Hier ist aber noch besonders darauf zu achten, dass eine Aenderung der Geschwindigkeit nicht nur der Grösse, sondern auch der

Richtung nach möglich ist. Zu Anfang eines Zeitelementes dt sei die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, zu Ende desselben $\mathfrak{v}'$. Wenn keine Kräfte wirkten, wäre $\mathfrak{v}'$ in jeder Hinsicht gleich $\mathfrak{v}$ nach dem Trägheitsgesetze. Wenn nicht gerade unendlich grosse Kräfte auftreten, kann sich $\mathfrak{v}$ in dem Zeitelemente dt nur unendlich wenig — sowohl der Grösse als der Richtung nach — geändert haben. Wir bilden die geometrische Differenz von $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{v}$ und setzen sie

$$d\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' - \mathfrak{v}.$$

Dann gibt uns das Differential $d\mathfrak{v}$ die in dt stattfindende Aenderung der Geschwindigkeit sowohl der Grösse als der Richtung nach an. Dividiren wir $d\mathfrak{v}$ durch dt, so erhalten wir die auf die Zeiteinheit bezogene Aenderung der Geschwindigkeit in derjenigen Intensität und Richtung, die für den Augenblick grade zutrifft. Wir bleiben also in Uebereinstimmung mit den früheren Festsetzungen und ergänzen sie nur so weit, dass auch die Richtungsänderungen mit einbezogen werden, wenn wir die Beschleunigung $\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \tag{30}$$

setzen. Verbinden wir hiermit Gl. (27), so erhalten wir auch

$$\mathfrak{b} = \frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}. \tag{31}$$

Auch hier können wir sofort wieder auf die Componenten nach den Axenrichtungen zurückgehen und erhalten

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathfrak{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathfrak{k}\frac{d^2z}{dt^2}$$

oder, wenn wir die Componenten von $\mathfrak{b}$ der Grösse nach mit $b_1 b_2 b_3$ bezeichnen,

$$b_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad b_2 = \frac{dv_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad b_3 = \frac{dv_3}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{32}$$

Es fragt sich jetzt, in welchem Zusammenhange die hiermit näher definirte Beschleunigung $\mathfrak{b}$ mit der Kraft $\mathfrak{P}$ steht, die während der Bewegung an dem materiellen Punkte angreift, d. h. welche Fassung wir in diesem allgemeinen Falle

der dynamischen Grundgleichung zu geben haben. Um diese Frage zu entscheiden, müssen wir noch einige Erörterungen über die Zusammensetzung verschiedener Bewegungen vorausgehen lassen.

§ 12. Das Princip der Unabhängigkeit verschiedener Bewegungen von einander und der Satz vom Kräfteparallelogramm.

Wir wollen uns die Bewegung eines materiellen Punktes von einem Coordinatensysteme aus beobachtet denken, das selbst eine Translationsbewegung (aber mit Ausschluss jeder Drehung) ausführt und daneben sei auch auf die absolute Bewegung sowohl des Punktes als des Coordinatensystems geachtet. Nach Ablauf der Zeit t möge jeder Punkt des Coordinatensystems den Weg $\mathfrak{s}'$ zurückgelegt haben und der materielle Punkt soll sich relativ zum Coordinatenanfang, mit dem er anfänglich zusammenfiel, um $\mathfrak{s}''$ verschoben haben. Dann finden wir den absoluten Weg $\mathfrak{s}$ des Punktes durch Ausführung der geometrischen Summirung

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}' + \mathfrak{s}''$$

und es ist dabei gleichgültig, ob wir uns erst die Bewegung $\mathfrak{s}'$ und nachher $\mathfrak{s}''$ oder ob wir uns beide in umgekehrter Reihenfolge oder schliesslich ob wir uns beide gleichzeitig ausgeführt denken. Dies geht unmittelbar aus der geometrischen Anschauung hervor und es steht uns offenbar frei, jede beliebige Bewegung $\mathfrak{s}$ eines Punktes durch Einführung solcher bewegter Coordinatensysteme, deren Wahl ganz beliebig ist, in mehrere Componenten in Gedanken zu zerlegen. Man pflegt dies dahin auszudrücken, dass ein materieller Punkt gleichzeitig mehrere Bewegungen neben einander ausführen kann. Früher war z. B. die Rede von der Bewegung, die ein Gepäckstück ausführt, das in einem Eisenbahnwagen herabfällt. Hierbei ergibt sich ganz ungezwungen die Zerlegung der absoluten Bewegung des fallenden Körpers in die Bewegung, die er mit dem Eisenbahnwagen nach wie vor zusammen ausführt und

in die Bewegung relativ zum Eisenbahnwagen. Offenbar steht es uns auch frei, uns beim schiefen Wurf eines Steines ein Coordinatensystem, so wie vorher den Eisenbahnwagen, in horizontaler Richtung mit dem Steine bewegt zu denken, so dass wir von diesem Coordinatensysteme aus gesehen nur noch mit der Bewegung des Steines in verticaler Richtung zu thun haben.

Diese Zerlegungen sind rein geometrischer Art und an sich willkürlich. Wenn wir sagen, dass die einzelnen Bewegungscomponenten unabhängig von einander erfolgen, kommt aber noch etwas anderes hinzu. Man denke sich eine Anzahl materieller Punkte von gleicher Masse, die unabhängig von einander sind und die zu Anfang alle dieselbe Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ hatten, während weiterhin auf jeden eine Kraft $\mathfrak{P}$ von gleicher Grösse und Richtung einwirkt. Da gleiche Ursachen gleiche Wirkungen haben, muss auch in jedem folgenden Augenblicke $\mathfrak{v}$ bei allen gleich sein; alle legen daher gleiche und parallele Bahnen zurück und die ganze Configuration ändert sich nicht. Wir können uns ferner vorstellen, dass ein Coordinatensystem die Translationsbewegung mit derselben Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ mitmacht. Dann sind alle Punkte relativ zu diesem Coordinatensysteme in Ruhe. Sollte nun unter diesen Punkten einer sich befinden, an dem ausser der allen gemeinsamen Kraft $\mathfrak{P}$ noch eine andere Kraft $\mathfrak{P}'$ angreift, so bewegt er sich nun anders als die übrigen, d. h. er führt ausser der gemeinsamen Bewegung auch noch eine Bewegung relativ zu dem Coordinatensysteme aus. Das Princip der Unabhängigkeit der Bewegungen von einander sagt nun aus, dass die Relativbewegung im vorhergehenden Falle genau so erfolgt, als wenn das Coordinatensystem selbst ruhte und $\mathfrak{P}'$ die einzige Kraft wäre, die an dem Punkte angriffe. Mit anderen Worten: ein Beobachter, der die Bewegung des Coordinatensystems mitmachte, würde von der Kraft $\mathfrak{P}$ gar keine Notiz zu nehmen haben und die Bewegung des Punktes, die er wahrnimmt, ausschliesslich auf die Wirkung der Kraft $\mathfrak{P}'$ zurückführen können. Ausdrücklich betont möge aber noch

einmal werden, dass die Bewegung des Coordinatensystems nur in einer Translation bestehen darf, wenn die vorausgehenden Betrachtungen anwendbar sein sollen.

Dieses Princip der Unabhängigkeit — auch Superpositionsprincip genannt — kann nicht mathematisch bewiesen, es kann durch die vorhergehenden Erörterungen nur wahrscheinlich gemacht werden, weil wir dadurch auf Erfahrungen hingewiesen werden, die uns geläufig sind (wie die von der Fallbewegung im Eisenbahnwagen). Nach allen Erfahrungen, die jemals daraufhin geprüft wurden, hat es sich aber stets als streng gültig bewiesen. Wir besitzen daher in diesem Principe einen überaus einfachen und bequem anwendbaren Satz, der in sich das Resultat eines sehr reichen Erfahrungsschatzes zusammenfasst und wir sind den vorausgegangenen Geschlechtern für wenige wissenschaftliche Ueberlieferungen zu so viel Dank verbunden, als für diesen dem Geschehen in der Aussenwelt abgelauschten Satz.

Den ersten Urheber des Satzes vermag man nicht anzugeben. Vermuthungen dieser Art dürften wohl schon in sehr frühen Zeiten bestanden haben; aber erst ganz allmählich gewannen sie an Sicherheit und Bestimmtheit. Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist, wie man sofort sehen wird, nur eine andere Aussageform des Princips der Unabhängigkeit und dieser Satz wird gewöhnlich Newton und Varignon, die ihn ungefähr gleichzeitig und unabhängig von einander gefunden haben sollen, zugeschrieben. Nach anderen Angaben soll aber der Satz auch schon Galilei in seinen beiden Formen geläufig gewesen sein, der ihm nur keine besondere Bedeutung beigemessen haben soll.

Die vorausgehenden Untersuchungen setzen uns jetzt auch in den Stand, die schon am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgeworfene Frage zu beantworten, in welchem Zusammenhange die Beschleunigung $\mathfrak{b}$ mit der Kraft $\mathfrak{P}$ bei der krummlinigen Bewegung des materiellen Punktes steht. Wir wissen jetzt, dass die von der Kraft $\mathfrak{P}$ für sich hervorgebrachten Geschwindigkeiten ganz unabhängig sind von jenen, die schon

bestanden haben oder die von anderen Ursachen herrühren. Wir können daher, um in einem gegebenen Augenblicke $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ zu berechnen, von dem schon bestehenden $\mathfrak{v}$ ganz absehen, d. h. die Bewegung in das schon vorhandene $\mathfrak{v}$ und die durch die Wirkung von $\mathfrak{P}$ veranlasste Aenderung der Geschwindigkeit zerlegen. Dieser letzte Antheil der Geschwindigkeit beginnt dann von der Ruhe aus, im Sinne der Kraft $\mathfrak{P}$ und nach dem schon bei der gradlinigen Bewegung dafür festgestellten Gesetze. Für den Zusammenhang zwischen den augenblicklich gültigen Werthen dieser Grössen kann es nämlich nichts ausmachen, wenn etwa später $\mathfrak{P}$ die Richtung ändern sollte; für die Dauer eines Zeitelementes dt kann die Richtung der Kraft $\mathfrak{P}$ jedenfalls als constant angesehen werden.

Auf Grund dieser Erwägungen erweitert sich die dynamische Grundgleichung jetzt einfach zu

$$\mathfrak{P} = m\mathfrak{b} = m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = m\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}. \qquad (33)$$

Der Unterschied gegen früher besteht nur darin, dass jetzt deutsche an die Stelle der lateinischen Buchstaben getreten sind. Die dynamische Grundgleichung bleibt demnach in der früheren Aussageform ganz allgemein richtig, sobald man bei allen in ihr vorkommenden Grössen die Richtung beachtet.

Wirken zwei Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ gleichzeitig auf einen materiellen Punkt ein, so kann man dessen Bewegung in der vorher geschilderten Weise in zwei Antheile $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ zerlegen, wovon der Weg $\mathfrak{s}_1$ durch $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ durch $\mathfrak{P}_2$ bedingt ist. Man hat dann

$$\mathfrak{P}_1 = m\frac{d^2\mathfrak{s}_1}{dt^2}; \qquad \mathfrak{P}_2 = m\frac{d^2\mathfrak{s}_2}{dt^2}.$$

Andererseits ist aber der absolute Weg $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2$ und daher

$$m\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2.$$

Auch diese Gleichung hat die Form des dynamischen Grundgesetzes und sie zeigt uns, dass die absolute Bewegung so vor sich geht, als wenn an dem materiellen Punkte in jedem Augenblicke eine Kraft $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 \tag{34}$$

wirkte. Die Kraft $\mathfrak{R}$ ersetzt die beiden gleichzeitig einwirkenden Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ vollständig und sie wird deren Resultirende genannt. Gl. (34) spricht daher den Satz vom Parallelogramm der Kräfte aus, denn die Parallelogrammconstruction wird ja in der That nur benutzt, um die geometrische Summe aus $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zu bilden. An Stelle des Parallelogramms genügt auch ein Dreieck, das aus den Seiten $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{R}$ zusammengesetzt ist.

Diese Betrachtung bleibt ohne Weiteres gültig, wenn auch mehr als zwei Kräfte $\mathfrak{P}$ an dem materiellen Punkte angreifen. Die Resultirende wird in jedem Falle durch die geometrische Summirung gefunden. Indem wir das Zeichen Σ, falls es vor einer Vectorgrösse steht, als Zeichen für die geometrische Summe auffassen, haben wir für die Resultirende $\mathfrak{R}$ aus beliebig vielen Kräften, die alle an demselben materiellen Punkte wirken,

$$\mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{P} \tag{35}$$

und diese Gleichung zeigt uns an, dass $\mathfrak{R}$ die letzte Seite in einem Polygone ist, dessen übrige Seiten aus den $\mathfrak{P}$ gebildet werden. Wenn man den Umfang dieses Polygons im Sinne des Pfeiles von einer der Kräfte $\mathfrak{P}$ durchläuft, gehen die Pfeile von allen $\mathfrak{P}$ im Umlaufssinne; der Pfeil von $\mathfrak{R}$ ist aber entgegengesetzt dem Umlaufssinne gerichtet (Abb. 3).

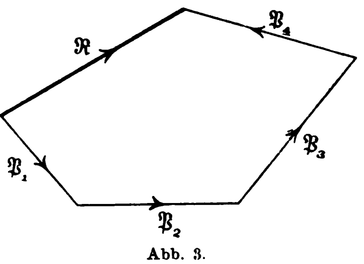


Abb. 3.

Es kann auch sein, dass sich die Wirkungen aller Kräfte $\mathfrak{P}$, die an einem materiellen Punkte angreifen, grade aufheben. Der Punkt bleibt dann in Ruhe, wenn er vorher in Ruhe war, oder er behält die Geschwindigkeit, die er besass, unverändert nach Grösse und Richtung bei. Für diesen Gleichgewichtsfall bildet die Gleichung

$$\Sigma \mathfrak{P} = 0 \tag{36}$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung.

Alle diese Vectorgleichungen können auch wieder in ihre Componenten nach den Coordinatenaxen zerlegt werden. Da gleiche und gleichgerichtete Strecken gleiche Projectionen auf irgend eine Ebene oder irgend eine Axe ergeben, kann man stets auf einfachste Art zu den Componentengleichungen übergehen, sobald die Vectorgleichungen bekannt sind. So zerfällt Gl. (33), wenn man nur die darin zuletzt angegebene Form in Berücksichtigung zieht, in

$$P_1 = m\frac{d^2x}{dt^2}; \quad P_2 = m\frac{d^2y}{dt^2}; \quad P_3 = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

wobei $P_1 P_2 P_3$ die drei rechtwinkligen Componenten von $\mathfrak{P}$ sind. Ebenso wird aus Gl. (35)

$$R_1 = \Sigma P_1; \quad R_2 = \Sigma P_2; \quad R_3 = \Sigma P_3$$

u. s. f. Man sieht auch leicht ein, dass zwischen den Parallel-Projectionen $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}'$ von den Kräften $\mathfrak{P}$ auf irgend eine Ebene die aus Gl. (35) hervorgehende Gleichung

$$\mathfrak{R}' = \Sigma \mathfrak{P}' \tag{37}$$

und ebenso für den Gleichgewichtsfall die Bedingungsgleichung

$$\Sigma \mathfrak{P}' = 0 \tag{38}$$

besteht. Dies folgt nämlich daraus, dass sich jedes geschlossene Polygon wieder als ein geschlossenes Polygon projicirt und dass in diesem die Seiten unmittelbar die Kräfteprojectionen $\mathfrak{P}'$ bezw. $\mathfrak{R}'$ darstellen.

§ 13. Der schiefe Wurf.

Wenn ein Stein in einer Richtung, die den Winkel α mit der Horizontalen bildet, mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ abgeworfen wird, beschreibt er, wenn auf den Luftwiderstand keine Rücksicht genommen wird, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung im allgemeineren Sinne des Wortes. Die einzige Kraft, die während des Fluges auf ihn wirkt, ist sein Gewicht, und dieses bleibt nach Grösse und Richtung ungeändert. Auch

die Beschleunigung bleibt daher constant und diese sei hier, um auch die Richtung zum Ausdrucke zu bringen, mit $\mathfrak{g}$ bezeichnet. Man hat daher die Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{g},$$

aus der, da $\mathfrak{g}$ constant ist, durch Integration folgt

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}t.$$

Hier ist $\mathfrak{v}_0$ die Integrationsconstante und zwar, wie aus der Gleichung folgt, wenn man $t = 0$ setzt, die Anfangsgeschwindigkeit. Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \mathfrak{v}_0 + \mathfrak{g}t,$$

so folgt durch abermalige Integration

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 + \mathfrak{v}_0 t + \frac{\mathfrak{g}t^2}{2},$$

oder, wenn man die Radienvectoren $\mathfrak{s}$ vom Anfangspunkte der Flugbahn aus rechnet,

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{v}_0 t + \frac{\mathfrak{g}t^2}{2}.$$

Diese Gleichung bildet zugleich die Gleichung der Flugbahn. Aus Abb. 4 kann sie übrigens unmittelbar abgelesen werden. Da man aber in der analytischen Geometrie die Eigenschaften der Curven nach der Coordinatenmethode zu untersuchen pflegt, ist es besser, wenn wir die Gleichung in ihre Componentengleichungen zerlegen. Zunächst beachten wir, dass jedes $\mathfrak{s}$ in der durch die Richtungen von $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{g}$ gelegten lothrechten Ebene

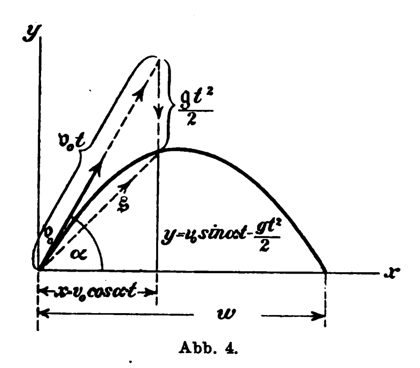


Abb. 4.

enthalten ist; die Bahn ist also eine ebene Curve. Legen wir eine x-Axe in horizontaler und eine y-Axe in lothrechter Richtung nach oben durch den Anfangspunkt der Flugbahn,

so erhalten wir aus der vorigen Gleichung durch Projiciren auf diese beiden Axen

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t; \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Unter v_0 ist hier der Absolutbetrag von $\mathfrak{v}_0$ zu verstehen. Die erste dieser Gleichungen lösen wir nach t auf und setzen den gefundenen Werth in die zweite Gleichung ein. Dann wird

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

y ist also eine Function zweiten Grades von x und die Bahn ist eine Parabel mit senkrechter Axe.

Die Wurfweite w finden wir hieraus, wenn angenommen wird, dass Anfang und Ende der Flugbahn gleich hoch liegen, indem wir $y = 0$ setzen und die Gleichung nach x auflösen. Die eine Lösung $x = 0$ liefert den Anfangspunkt der Flugbahn, die andere die Abscisse des Endpunktes, d. h. die Wurfweite w. Man erhält

$$w = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Die grösste Wurfweite bei gegebenem v_0 erhält man für $\alpha = \frac{1}{2}R$ oder nach dem gebräuchlichen Bogenmaass der Winkel für $\alpha = \frac{\pi}{4}$, denn $\sin 2\alpha$ nimmt dabei den grössten Werth an, den ein Sinus erlangen kann. Wir haben also

$$w_{max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Auch andere Fragen, wie jene nach der Höhe des Scheitels der Flugbahn oder nach der Wurfweite bei geneigter Bodenoberfläche u. s. f. lassen sich mit Hülfe der aufgestellten Gleichungen leicht beantworten.

Wenn beim schiefen Wurfe auf den Luftwiderstand Rücksicht genommen werden muss, geht die Wurfparabel in die ballistische Curve über. Die Untersuchung gestaltet sich hier im Allgemeinen ähnlich wie jene in § 8. Die Integration der Gleichung macht aber hier mehr Schwierigkeiten. Ich verzichte darauf, diese Rechnung hier wiederzugeben, da kein

neuer Gesichtspunkt für die Mechanik daraus gewonnen wird und weil ich auch bei den Studirenden des zweiten Semesters noch nicht voraussetzen kann, dass sie den mathematischen Entwickelungen, die dabei in Betracht kommen, zu folgen vermögen. Wer später im praktischen Leben als Ingenieur einer Kanonenfabrik oder als Artillerieoffizier Kenntniss von den Eigenschaften der ballistischen Curve haben muss, wird die Ballistik, die sich als besonderer Zweig der technischen Mechanik ausgebildet hat, ohnehin zum Gegenstande eines eingehenden Studiums machen müssen. In einer allgemeinen Vorlesung über technische Mechanik kann auf die ausführliche Erörterung solcher Specialfragen nicht eingegangen werden; es muss hier genügen, wenn der Studirende so weit geführt wird, dass er sich später ohne Schwierigkeit in das Studium dieser Specialfragen vertiefen kann.

§ 14. Centripetal- und Centrifugalkraft.

Ein materieller Punkt möge sich in einem Kreise vom Halbmesser r mit einer dem absoluten Werthe nach constanten Geschwindigkeit v bewegen. Nach dem Trägheitsgesetze wissen wir, dass dann eine Kraft $\mathfrak{P}$ an ihm wirken muss, die die Richtungsänderung der Geschwindigkeit verursacht, und die dynamische Grundgleichung gestattet uns, Grösse und Richtung dieser Kraft $\mathfrak{P}$ sofort zu berechnen. Sollten gleichzeitig mehrere Kräfte an dem materiellen Punkte angreifen, so ist unter $\mathfrak{P}$ deren Resultirende zu verstehen.

Wir setzen

$$\mathfrak{v} = v\mathfrak{v}_1, \tag{39}$$

wo jetzt $\mathfrak{v}_1$ ein Richtungsfactor ist, so wie früher die $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Der Richtungsfactor $\mathfrak{v}_1$ ist aber hier mit der Zeit veränderlich, während v constant ist. Nach der dynamischen Grundgleichung ist

$$\mathfrak{P} = m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}.$$

Wir führen für $\mathfrak{v}$ den Werth aus Gl. (39) ein und nehmen

daran die Differentiation nach der Zeit t vor. Da der Factor v constant ist, erhalten wir

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = v\frac{d\mathfrak{v}_1}{dt}.$$

Wir müssen uns jetzt nach der geometrischen Bedeutung des Differentialquotienten $\frac{d\mathfrak{v}_1}{dt}$ fragen. Dazu beachten wir, dass $d\mathfrak{v}_1$ die Aenderung ist, die $\mathfrak{v}_1$ in dt erfährt. Bezeichnen wir also die Werthe von $\mathfrak{v}_1$ zu Anfang und zu Ende von dt mit $\mathfrak{v}_1$ und mit $\mathfrak{v}_1'$, so ist

$$\mathfrak{v}_1' = \mathfrak{v}_1 + d\mathfrak{v}_1.$$

Nun ist aber $\mathfrak{v}_1'$ wiederum ein blosser Richtungsfactor vom Werthe Eins, grade so wie $\mathfrak{v}_1$. Wenn wir alle Richtungsfactoren der Geschwindigkeit, die überhaupt während der Bewegung vorkommen, von einem Aufangspunkte aus abtragen, so bilden sie die Radien eines Kreises. In Abb. 5 sind wenigstens die beiden in dt aufeinander folgenden Richtungsfactoren $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_1'$ eingetragen und ebenso die dritte Seite des Dreiecks, die nach dem Begriffe der geometrischen Summe $d\mathfrak{v}_1$ darstellt. Diese Seite ist unendlich klein zu denken und sie kann auch als ein Bogenelement des vorher erwähnten Kreises aufgefasst werden. Da der Halbmesser eines Kreises überall senkrecht zum Umfange steht, erkennen wir zunächst, dass $d\mathfrak{v}_1$ senkrecht zu $\mathfrak{v}_1$ gerichtet ist. In dem Kreise, den der bewegte Punkt beschreibt, und der mit dem Kreise, von dem jetzt die Rede war, nicht verwechselt werden darf, fällt demnach $d\mathfrak{v}_1$ in die Richtung des Radius, und zwar ist es mit dem Pfeile nach dem Mittelpunkte hin gerichtet. Es bleibt nur noch übrig, den numerischen Werth von $d\mathfrak{v}_1$ festzustellen. Dieser sei mit $(d\mathfrak{v}_1)$ bezeichnet. Wir erhalten ihn nach Abb. 5 als Werth des Bogens, der zum Centriwinkel $d\varphi$ beim Radius Eins gehört, also

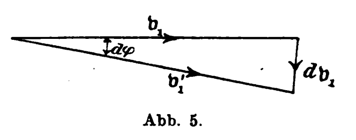


Abb. 5.

$$(d\mathfrak{v}_1) = d\varphi.$$

Unter $d\varphi$ ist hier zugleich der Winkel zu verstehen, den die beiden in dt aufeinander folgenden Tangenten des Bahnkreises mit einander bilden, oder auch der Winkel zwischen den zugehörigen Halbmessern des Bahnkreises. Bezeichnen wir also die Länge des von dem materiellen Punkte in dt zurückgelegten Weges mit ds, so ist

$$d\varphi = \frac{ds}{r},$$

und da $ds = vdt$ gesetzt werden kann,

$$(d\mathfrak{v}_1) = \frac{vdt}{r}.$$

Demnach wird

$$\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) = \frac{v^2}{r}, \tag{40}$$

wobei auch hier wieder das Einschliessen in eine Klammer darauf hinweisen soll, dass nur nach der absoluten Grösse und nicht nach der Richtung der Beschleunigung gefragt wird. Durch Einsetzen der Beschleunigung in die dynamische Grundgleichung erhalten wir die Grösse der Kraft $\mathfrak{P}$ und zugleich auch deren Richtung, die mit jener von $d\mathfrak{v}$ oder $d\mathfrak{v}_1$ zusammenfällt. Die Kraft, die an dem materiellen Punkte wirken muss, um diesen auf der kreisförmigen Bahn mit constanter Geschwindigkeit festzuhalten, ist hiernach stets nach dem Mittelpunkte hin gerichtet, und sie wird aus diesem Grunde die Centripetalkraft der betrachteten Bewegung genannt. Es ist üblich, ihre Grösse mit dem Buchstaben C zu bezeichnen und durch Einsetzen von Gl. (40) in die dynamische Grundgleichung erhalten wir dafür

$$C = \frac{mv^2}{r} = \frac{Qv^2}{gr}, \tag{41}$$

wenn die Masse m mit Hülfe des Gewichtes Q und der Fallbeschleunigung g ausgedrückt wird.

Die zu Anfang des Paragraphen gestellte Aufgabe ist damit vollständig gelöst. Es ist aber leicht möglich, die ganze Betrachtung nachträglich auch noch auf jede beliebige krummlinige Bewegung auszudehnen. Auch dazu gehen wir

wieder von Gl. (39) aus. Jetzt ist aber auch der Factor v als veränderlich anzusehen. Für die Ausführung der Differentiation an $v\mathfrak{v}_1$ gilt die gewöhnliche Differentiationsregel für Producte, also

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = v\frac{d\mathfrak{v}_1}{dt} + \mathfrak{v}_1\frac{dv}{dt},$$

und hiermit wird

$$\mathfrak{P} = mv\frac{d\mathfrak{v}_1}{dt} + m\mathfrak{v}_1\frac{dv}{dt}. \tag{42}$$

Wir erkennen daraus, dass die an dem beliebig bewegten materiellen Punkte wirkende Kraft in jedem Augenblicke als eine geometrische Summe von zwei Kräften aufgefasst werden kann. Das erste Glied dieser Summe ist die vorher ausschliesslich in Betracht gezogene Centripetalkraft, für die wir die vorausgehenden Entwickelungen ohne weitere Aenderung in Anspruch nehmen können, wenn wir nur unter r jetzt den Krümmungshalbmesser der Bahn verstehen und darauf achten, dass die Centripetalkraft in der Schmiegungsebene der Bahn enthalten und nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gerichtet ist. Das zweite Glied der Summe ist mit dem Richtungsfactor $\mathfrak{v}_1$ behaftet; es gibt also eine Kraft an, die in der Richtung der Tangente an die Bahncurve geht. Die Grösse dieser Tangentialcomponente von $\mathfrak{P}$ ist gleich $m\frac{dv}{dt}$, d. h. genau so gross, wie die ganze Kraft sein müsste, wenn der materielle Punkt eine gradlinige Bahn mit der veränderlichen Geschwindigkeit v durchlaufen sollte.

Wir gelangen hiernach zu einer deutlichen und anschaulichen Darstellung des ganzen Vorganges bei der krummlinigen Bewegung, wenn wir die an dem bewegten materiellen Punkte angreifende Kraft in jedem Augenblicke in zwei Componenten zerlegen, von denen eine in die Richtung der Bewegung fällt, während die andere zu ihr senkrecht steht. Die Tangentialcomponente bedingt den Zuwachs des Absolutwerths der Geschwindigkeit ohne Rücksicht auf die Bahnkrümmung, während die Normalcomponente ohne Einfluss auf die Grösse der Geschwindigkeit ist und nur die Richtungsänderung bewirkt.

Die Lehre von der Centripetalkraft ist mit diesen Betrachtungen erschöpft. Im Zusammenhange mit ihr steht aber noch der Begriff der Centrifugalkraft, der noch eine genauere Erwägung erfordert. Kaum eine andere Betrachtung aus den Elementen der Mechanik hat nämlich schon zu so vielen Unklarheiten und falschen Deutungen Veranlassung gegeben, als die Einführung des Hülfsbegriffes der Centrifugalkraft. Wie mir scheint, ist dies vorwiegend darauf zurückzuführen, dass von diesem Begriffe zu zwei verschiedenen Zwecken Gebrauch gemacht wird, ohne dass diese stets richtig auseinandergehalten würden.*)

Es wird für das Verständniss am besten sein, wenn ich dies an einem leicht fasslichen Beispiele näher erkläre. Dazu betrachte ich einen Eisenbahnwagen, der eine Curve durchläuft, also etwa den letzten Wagen eines Eisenbahnzuges. Durch den Zughaken wird auf ihn eine Tangentialkraft übertragen, die so gross bemessen sein möge, dass sie grade die verschiedenen Bewegungswiderstände überwindet. Der Wagen wird dann die Curve mit einer der Grösse nach constanten Geschwindigkeit durchlaufen. Um die Richtungsänderung der Geschwindigkeit zu bewirken, muss aber ausserdem noch eine Normalkraft auf ihn übertragen werden. Diese kennen wir schon unter dem Namen der Centripetalkraft, und ihrer Berechnung nach Gl. (41) steht im gegebenen Falle nichts im Wege. Sie kann nur durch die Schienen auf den Wagen übertragen werden, da diese es sind, die dem Wagen die krummlinige Bewegung vorschreiben.

Bis dahin hat man gar keine Veranlassung, neben der Centripetalkraft von einer Centrifugalkraft zu reden. Man kann nun aber, nachdem man das Verhalten des Eisenbahn-

*) Davon vermag ich auch die sonst so meisterhaft geschriebene Einleitung des Buches von Heinrich Hertz über die Principien der Mechanik nicht freizusprechen. Die Schwierigkeiten, die dort in Hinsicht auf die Centrifugalkraft hervorgehoben werden, entspringen nach meinem Urtheile ausschliesslich aus dem Doppelsinne, der mit dem Worte verbunden wird.

wagens untersucht hat, dazu übergehen, das Verhalten des Geleises zu betrachten. Nach dem erst später, bei der Untersuchung der Punkthaufen, näher zu erörternden Gesetze von der Wechselwirkung, das aber für den Augenblick bereits als im Allgemeinen bekannt vorausgesetzt werden darf, ist die von dem Wagen auf das Geleise übertragene Kraft gleich gross und entgegengesetzt gerichtet mit der vom Geleise auf den Wagen übertragenen. So kommen wir zu der am Geleise angreifenden „Centrifugalkraft“, deren Grösse ebenfalls durch Gl. (41) angegeben wird, deren Richtung aber jetzt vom Krümmungsmittelpunkt abgewendet ist.

Das ist die eine Bedeutung, in der das Wort Centrifugalkraft gebraucht wird. Es bedeutet hier eine Kraft im gewöhnlichen Sinne des Wortes, die nur an einem anderen Körper wirkt, als an dem, den wir ursprünglich ins Auge fassten. Irgend ein Missverständniss ist auch bis jetzt noch nicht möglich.

Nun ist aber auch noch ein völlig verschiedener Gebrauch der Bezeichnung Centrifugalkraft üblich. Die einfachsten Aufgaben der Mechanik sind nämlich jene, die sich auf das Gleichgewicht von Kräften an einem materiellen Punkte beziehen. Wo es angeht, sucht man verwickeltere Fälle auf diesen einfachsten Fall zurückzuführen. An dem Eisenbahnwagen, den wir betrachteten, können alle Kräfte, die an ihm wirken, nicht im Gleichgewichte mit einander stehen, sondern wir wissen schon, dass sie eine Resultirende ergeben müssen, die die Richtungsänderung der Bewegung hervorruft. Trotzdem erscheint es aber erwünscht, die Aufgabe auf ein Gleichgewichtsproblem zurückzuführen. Das kann natürlich nur willkürlich oder, wenn man will, gewaltsam geschehen, indem man sich noch eine Kraft hinzudenkt, die in Wirklichkeit gar nicht vorhanden ist. Man braucht vor diesem Kunstgriffe nicht zurückzuschrecken, wenn man sich nur klar darüber bleibt, dass man damit zur Vereinfachung der Untersuchung eine Kraft fingirt, der in der Wirklichkeit nichts entspricht. Wie man diese fingirte Kraft zu wählen hat, um den thatsächlich

vorliegenden Fall auf einen ihm verwandten Gleichgewichtsfall zurückzuführen, ist leicht einzusehen: sie muss die Resultirende aller übrigen Kräfte, also die Centripetalkraft, grade aufheben, also gleich gross und entgegengesetzt gerichtet mit ihr sein.

Damit kommen wir auf die Centrifugalkraft in der zweiten Bedeutung des Wortes. Der Grösse und Richtung nach stimmt sie überein mit der vorher mit diesem Worte bezeichneten Kraft. Sonst ist aber der Unterschied sehr erheblich; während die Centrifugalkraft in der ersten Bedeutung physikalisch existirt und z. B. durch die elastischen Formänderungen, die sie an den Schienen hervorruft, nachgewiesen werden kann, ist die Centrifugalkraft im zweiten Sinne des Wortes eine willkürlich eingeführte Rechnungsgrösse, die ausserdem an einem ganz anderen Körper angreifend gedacht wird, als jene. Es ist nun auch klar, dass man zu argen Fehlern verleitet werden kann, wenn man diese blos erdichtete Kraft des gleichen Namens wegen mit der thatsächlich vorhandenen verwechselt.

Der Kunstgriff, der uns zur Einführung der „fingirten" Centrifugalkraft, wie ich sie zur Unterscheidung von der real existirenden heissen will, brachte, wird in der Mechanik sehr häufig angewendet. In seiner vollen Ausgestaltung ist er unter dem Namen des d'Alembert'schen Princips bekannt. Mit diesem werde ich mich erst im letzten Theile dieser Vorlesungen ausführlicher beschäftigen; schon jetzt sollte aber erwähnt werden, dass die fingirte Centrifugalkraft keineswegs eine Ausnahmestellung in der Mechanik einnimmt, sondern dass sie nur eine von den vielen fingirten Kräften ist, durch die man Aufgaben der Dynamik auf solche der Statik zurückzuführen sucht.

Es wird nützlich sein, wenn ich an diese Erörterungen sofort noch eine einfache Rechnung anschliesse, die in einem Lehrbuche der technischen Mechanik ohnehin vorgetragen werden muss und aus der zugleich hervorgeht, dass die Einführung der fingirten Centrifugalkraft, wenn sie auch ganz

gut vermieden werden könnte, doch zur bequemeren Durchführung der Betrachtung recht wohl geeignet ist.

In einem gekrümmten Eisenbahngeleise pflegt man bekanntlich die äussere Schiene gegenüber der inneren etwas zu überhöhen. Würde man dies unterlassen, so müssten sich die Radflantschen an die äusseren Schienen anlegen, um die Uebertragung der Centripetalkraft von den Schienen auf den Wagen zu vermitteln. Dann wäre aber an dieser Stelle zugleich eine Reibung zwischen Radflantsch und Schiene zu überwinden, die man nicht nur, um an Zugkraft zu sparen, sondern auch der Abnützung wegen, die damit verbunden wäre, zu vermeiden sucht. Bei passend gewählter Ueberhöhung der äusseren Schiene kann man erreichen, dass ein zur Verbindungslinie AB beider Schienen (Abb. 6) normal stehender Raddruck eine horizontale Componente liefert, die schon grade den Werth der Centripetalkraft hat. Dann ist ein Anlegen des Radflantsches ebensowenig an die äussere, als an die innere Schiene zu erwarten. Freilich kann die Ueberhöhung nur so bemessen werden, dass dies für irgend eine bestimmte Fahrgeschwindigkeit zutrifft; bei grösseren Geschwindigkeiten legen sich die Räder seitlich an die äussere, bei kleineren Geschwindigkeiten an die innere Schiene an.

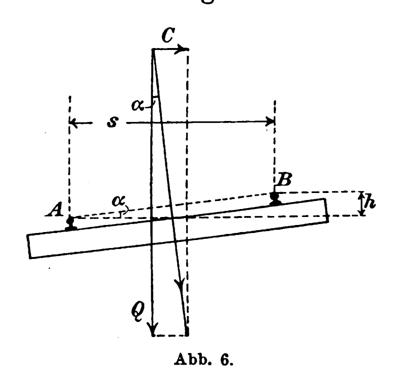


Abb. 6.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit, die wir der Berechnung der Ueberhöhung zu Grunde legen wollen, mit v, das Wagengewicht mit Q und den Krümmungshalbmesser des Geleises mit r, so können wir uns an dem Wagen eine fingirte Centrifugalkraft

$$C = \frac{Q}{g} \frac{v^2}{r}$$

angebracht denken. Dann muss C mit allen wirklich an dem Wagen angreifenden Kräften im Gleichgewichte stehen. Diese

Kräfte sind das Wagengewicht Q und der Druck der Schienen auf die Räder. Damit der Raddruck senkrecht zu AB stehe, muss dies auch von der Resultirenden aus C und Q zutreffen. Man hat daher (vgl. Abb. 6)

$$C = Q \operatorname{tg} \alpha,$$

woraus in Verbindung mit der vorausgehenden Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{gr}$$

folgt. Andererseits ist auch $\operatorname{tg} \alpha = h:s$, wenn h die Schienenüberhöhung und s die Spurweite bedeuten, und damit erhält man schliesslich

$$h = \frac{v^2 s}{gr}.$$

So wird z. B. für $s = 1{,}435$ m, $r = 200$ m und $v = 15$ m/sec die Schienenüberhöhung

$$h = \frac{225 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{sec}^2} \cdot 1{,}435\ \mathrm{m}}{9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} \cdot 200\ \mathrm{m}} = 0{,}164\ \mathrm{m}.$$

Man sieht daraus zugleich, dass die Formel für h homogen in den Dimensionen ist.

§ 15. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Die schon in § 9 gegebene Definition der Arbeit einer Kraft soll jetzt für den Fall erweitert werden, dass die Bewegung des materiellen Punktes anders gerichtet ist, als die Kraft. Wenn die Richtungen von $\mathfrak{P}$ und dem Wege $\mathfrak{s}$ irgend einen Winkel φ mit einander bilden, wie in Abb. 7, wollen wir unter der Arbeit der Kraft das Product

$$Ps \cos \varphi$$

verstehen. Diese Festsetzung ist in Uebereinstimmung mit der früheren, wenn wir $\varphi = 0$ wählen. Wenn der Winkel ein rechter ist, wird die Arbeit zu Null; für einen spitzen Winkel wird sie positiv

Abb. 7.

und für einen stumpfen negativ. Wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{s}$ genau entgegengesetzt gerichtet sind, wird die Arbeit negativ und dem Absolutwerthe nach eben so gross als bei übereinstimmenden Richtungen. Um $Ps \cos \varphi$ zu erhalten, können wir entweder $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{s}$ projiciren und die Projection mit der Weglänge s multipliciren oder umgekehrt die Projection des Weges auf die Kraftrichtung mit der Kraft multipliciren. Wir wollen dieser Vorschrift für die Berechnung der Arbeit der Kraft noch einen etwas anderen Ausdruck geben. Die Kraft $\mathfrak{P}$ können wir uns nach dem Parallelogrammgesetze in zwei Componenten gespaltet denken, von denen die eine in die Richtung des Weges $\mathfrak{s}$ fällt, während die andere senkrecht zu ihr steht. Die eine wollen wir die innere, die andere die äussere Componente von $\mathfrak{P}$ nennen. Wir können dann sagen, dass unter der Arbeit einer Kraft das Product aus dem Wege und der inneren Componente der Kraft zu verstehen ist. Ebenso können wir aber auch umgekehrt den Weg $\mathfrak{s}$ in zwei Componenten zerlegen, von denen eine in die Richtung der Kraft fällt und eine senkrecht zu ihr steht, und wir erhalten dann die Arbeit auch als das Product aus der ganzen Kraft und der inneren Componente des Wegs.

In der Mechanik und in der theoretischen Physik sieht man sich sehr häufig veranlasst, aus zwei gerichteten Grössen ein Product auf diese Art zu bilden. Es ist daher zweckmässig, eine besondere Bezeichnung dafür einzuführen. Wir nennen es ein geometrisches Product und zwar zur Unterscheidung von einem anderen geometrischen Producte, das wir im nächsten Paragraphen kennen lernen werden, das innere geometrische Product der Vectoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{s}$, aus denen es gebildet wird. Wir schreiben es, wie ein Product der Algebra, einfach $\mathfrak{P}\mathfrak{s}$, oder auch $\mathfrak{s}\mathfrak{P}$, da es, wie wir sahen, gleichgültig ist, welche der gerichteten Grössen wir auf die andere projiciren. Die Gleichung

$$\mathfrak{P}\mathfrak{s} = \mathfrak{s}\mathfrak{P} = Ps \cos \varphi$$

wiederholt nur nochmals die schon für das innere Product gegebene Definition.

Wenn der Weg des materiellen Punktes krummlinig ist, wobei auch die Kraft $\mathfrak{P}$ der Grösse und Richtung nach veränderlich sein kann, denken wir ihn uns, um die Arbeit der Kraft $\mathfrak{P}$ zu ermitteln, in unendlich kleine Elemente $d\mathfrak{s}$ zerlegt, für jedes Element das innere Product $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ gebildet und nachher alle diese „Elementararbeiten“ algebraisch summirt. Diese Festsetzung ist ebenso wie die vorige ganz willkürlich; sie dient nur dazu, die Bedeutung anzugeben, die wir mit der Bezeichnung „Arbeit einer Kraft“ verbinden. Im allgemeinsten Falle ist darunter stets das „Linienintegral“ der Kraft

$$\int \mathfrak{P} d\mathfrak{s}$$

zu verstehen, durch das die zuvor erwähnte Summirung zum Ausdrucke gebracht wird.

Der früher für den Fall der gradlinigen Bewegung bewiesene Satz von der lebendigen Kraft wird durch die erweiterte Bedeutung, die wir jetzt dem Begriffe der Arbeit gegeben haben, nicht ungültig. Wir haben nämlich nach dem dynamischen Grundgesetze

$$\mathfrak{P} = m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$$

und nach dem Begriffe der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$

$$d\mathfrak{s} = \mathfrak{v}dt.$$

Für das innere Product $\mathfrak{P}d\mathfrak{s}$ finden wir daher

$$\mathfrak{P}d\mathfrak{s} = m\mathfrak{v}d\mathfrak{v}.$$

Hier muss auch $\mathfrak{v}$ mit $d\mathfrak{v}$ auf innere Art multiplicirt werden. Projiciren wir aber $d\mathfrak{v}$ auf $\mathfrak{v}$, so erhalten wir die Aenderung dv des Absolutbetrages v von $\mathfrak{v}$ während des Zeitelementes; also auch

$$\mathfrak{P}d\mathfrak{s} = mvdv = d\left(m\frac{v^2}{2}\right),$$

und wenn wir hieraus die Summe für alle Wegeelemente bilden,

$$\int \mathfrak{P}d\mathfrak{s} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0{}^2}{2}, \tag{43}$$

d. h. die Arbeit der Kraft $\mathfrak{P}$, die allein an einem materiellen Punkte angreift, ist gleich dem Zuwachse, den die lebendige

Kraft erfährt. So ist z. B. die Arbeit der Centripetalkraft immer gleich Null, weil diese in jedem Augenblicke senkrecht zur Bewegungsrichtung steht und die lebendige Kraft erfährt durch sie keine Aenderung, weil es bei der lebendigen Kraft nicht auf die Richtung, sondern nur auf die Grösse der Geschwindigkeit ankommt.

Wir wollen jetzt ferner annehmen, dass mehrere Kräfte $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \ldots$ an einem materiellen Punkte angreifen, deren Resultirende

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3 + \cdots = \Sigma \mathfrak{P}$$

sei. Ausser den besonders namhaft gemachten Kräften $\mathfrak{P}$ können zugleich noch andere $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2$ u. s. f. an dem materiellen Punkte wirken, um die wir uns aber jetzt nicht kümmern wollen. Wir wollen ausserdem annehmen, dass sich der materielle Punkt um irgend eine Strecke $\mathfrak{s}$ verschiebe. Dabei ist wohl zu beachten, dass die Verschiebung $\mathfrak{s}$ nicht durch die von uns betrachteten Kräfte $\mathfrak{P}$ hervorgebracht zu sein braucht; wir können vielmehr durch geeignete Anbringung der übrigen Kräfte $\mathfrak{Q}$ bewirken, dass sich der materielle Punkt in irgend einer beliebigen Richtung verschiebt. Man nennt deshalb die Verschiebung eine „virtuelle“, womit nur gesagt sein soll, dass sie an sich möglich ist. Um die Arbeit der Kraft $\mathfrak{P}_1$ während dieser virtuellen Verschiebung zu berechnen, projiciren wir $\mathfrak{P}_1$ auf den Weg $\mathfrak{s}$ und bilden so das innere Product $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{s}$, und ebenso verfahren wir mit den anderen Kräften $\mathfrak{P}$ und mit ihrer Resultirenden $\mathfrak{R}$.

Wir sahen aber schon in § 12, dass zwischen den Projectionen der Kräfte auf irgend eine Grade die Beziehung

$$R' = \Sigma P'$$

gilt. Multipliciren wir diese Gleichung mit s, so wird auch

$$R' s = \Sigma P' s$$

oder, mit Rücksicht auf die Bedeutung des inneren Products,

$$\mathfrak{R}\mathfrak{s} = \Sigma \mathfrak{P}\mathfrak{s}, \tag{44}$$

d. h. in Worten: bei jeder Verschiebung, die wir mit dem materiellen Punkte vornehmen mögen oder die wir uns auch

nur vorgenommen denken können, ist die Arbeit der Resultirenden gleich der algebraischen Summe der Arbeiten der Componenten. Für den besonderen Fall, dass sich die Kräfte $\mathfrak{P}$ im Gleichgewichte halten, wird $\mathfrak{R}$ zu Null und Gl. (44) geht über in

$$\Sigma \mathfrak{P} \mathfrak{s} = 0 . \tag{45}$$

Die algebraische Summe der Arbeiten von Kräften, die sich an einem materiellen Punkte im Gleichgewichte halten, ist demnach für jede virtuelle Verschiebung gleich Null.

Die Gleichungen (44) und (45) sprechen das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten aus. Dieser Satz wird ein „Princip“, also ein grundlegender Satz genannt, obschon er bei unserer Darstellung nur eine einfache mathematische Folgerung aus dem Satze vom Kräfteparallelogramme bildet. Die Bezeichnung stammt daher, dass man ihn in der That hypothetisch zum Ausgangspunkte bei der Aufrichtung des Lehrgebäudes der Mechanik wählen kann und ihn oft dazu gewählt hat. Geht man so vor, dann erscheint der Satz vom Kräfteparallelogramme oder das Princip der Unabhängigkeit der verschiedenen Bewegungen von einander als eine aus dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten abgeleitete Folgerung.

An Stelle von virtuellen „Geschwindigkeiten“ würde man besser von virtuellen „Verschiebungen“ sprechen; der Name hat sich aber nun einmal in dieser Form seit mehr als einem Jahrhunderte eingebürgert und er soll daher beibehalten werden.

Analytisch betrachtet geht Gl. (44) aus $\mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{P}$ dadurch hervor, dass hierin jedes Glied mit der beliebigen Strecke $\mathfrak{s}$ auf innere Art multiplicirt wird. Man kann daher das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auch als einen Satz über das Rechnen mit gerichteten Grössen auffassen, der dann freilich noch allgemeiner gültig ist, als jenes Princip. Offenbar bleibt nämlich die für Gl. (44) gegebene Ableitung ohne jede Aenderung anwendbar, falls nur überhaupt die $\mathfrak{P}$ gerichtete Grössen sind, deren geometrische Summe $\mathfrak{R}$ ist. In der That werden wir später manchmal Gelegenheit haben,

Gl. (44) auch auf solche Fälle anzuwenden, bei denen die $\mathfrak{P}$ keine Kräfte sind. Wir fassen daher Gl. (44) und hiermit zugleich das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten noch in den sich dem Gedächtnisse leicht einprägenden Wortlaut zusammen: Eine geometrische Summe wird mit jeder beliebigen gerichteten Grösse auf innere Art multiplicirt, indem man jedes Glied damit multiplicirt.

§ 16. Momentensatz.

Auch der Satz von den statischen Momenten ist, wie sich alsbald zeigen wird, nichts Anderes, als ein Multiplicationssatz. Ausser den inneren Producten aus Kräften und Strecken, die wir im vorigen Paragraphen betrachteten, bildet man nämlich in der Mechanik daraus auch geometrische Producte auf äussere Art. Dazu multiplicirt man die eine der beiden gerichteten Grössen mit der zu ihr senkrecht stehenden Componente der anderen.

In Abb. 8 sei A der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{P}$, O ein beliebig gewählter Anfangspunkt und $\mathfrak{r}$ der von diesem aus nach A gezogene Radiusvector. Das äussere geometrische Product aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$ wird das statische Moment der Kraft $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Punkt O genannt; ausserdem heisst in diesem Zusammenhange O der Momentenpunkt und $\mathfrak{r}$ der Hebelarm. Die letzte Bezeichnung wird freilich öfters nur auf die äussere (d. h. die zu $\mathfrak{P}$ senkrechte) Componente von $\mathfrak{r}$ angewendet; ich halte es aber für besser, das Wort in dem allgemeineren Sinne zu gebrauchen. Ein Missverständniss kann übrigens aus diesen verschiedenen Bedeutungen des Wortes kaum entstehen, da bei der Bildung des statischen Momentes in jedem Falle nur die äussere Componente von $\mathfrak{r}$ in Betracht kommt.

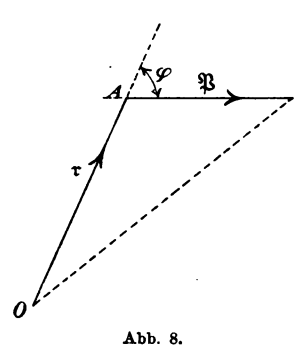


Abb. 8.

Wenn $\mathfrak{P}$ nicht eine Kraft, sondern eine Strecke wäre, hätte das äussere Product aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$ eine sehr einfache Bedeutung; es würde nämlich den doppelten Inhalt des Dreiecks angeben, in dem $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$ als Seiten vorkommen. Denn die zu $\mathfrak{P}$ äussere Componente von $\mathfrak{r}$ wäre nichts Anderes, als die zur Grundlinie $\mathfrak{P}$ gehörige Höhe jenes Dreiecks, und ebenso würde man zu dem doppelten Dreiecksinhalte auch gelangen, wenn man die Grundlinie $\mathfrak{r}$ mit der „äusseren“ (also zu ihr rechtwinkligen) Componente von $\mathfrak{P}$ multiplicirte. In Wirklichkeit ist nun freilich bei den Anwendungen des äusseren Products in der Mechanik $\mathfrak{P}$ gewöhnlich eine Kraft; obschon uns auch andere Fälle gelegentlich vorkommen werden. Das äussere Product aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$, also das statische Moment der Kraft kann dann nicht mehr gleich dem doppelten Flächeninhalte des Dreiecks gesetzt werden, da beide Grössen von ganz verschiedenen physikalischen Dimensionen sind. Immerhin kann aber unter Zugrundelegung eines passend gewählten Maassstabes jede gerichtete Grösse durch eine Strecke dargestellt werden, und bei den Kräften macht man davon in der Mechanik ganz regelmässig Gebrauch. In demselben Sinne nun wie $\mathfrak{P}$ durch eine Strecke, kann auch das äussere Product aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$ durch eine Fläche, also durch die doppelte Fläche jenes Dreiecks dargestellt werden. Das Dreieck, das $\mathfrak{P}$ zur Grundlinie und den Momentenpunkt zur gegenüberliegenden Spitze hat, wird daher auch als das Momentendreieck bezeichnet. Wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$ gleich gerichtet sind, geht das Momentendreieck in eine einzige Linie über, d. h. das Moment einer Kraft ist Null für jeden Momentenpunkt, der auf ihrer Richtungslinie enthalten ist.

Die Grösse des Moments ist durch die vorausgehenden Bemerkungen schon vollständig festgesetzt. Bezeichnet man den Winkel zwischen den von dem Scheitel aus in den Pfeilrichtungen abgetragenen Vectoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$ mit φ (Abb. 8), so ist die Grösse des statischen Moments auch gleich

$$Pr \sin \varphi .$$

Ein solcher Winkel φ zwischen zwei Richtungen kann

immer nur zwischen 0 und einem gestreckten liegen, da die Winkel des dritten und vierten Quadranten, die daneben auftreten, nicht in Betracht kommen. Der Sinus eines Winkels zwischen 0 und π ist aber immer positiv; wenn wir uns also bei der Definition des statischen Moments nur an den Ausdruck $Pr \sin \varphi$ halten wollten, wären alle Momente positiv. Mit einem derart definirten äusseren Producte wäre aber in der Mechanik gar nichts anzufangen; wir müssen unsere Definition jedenfalls so einrichten, dass bei entgegengesetztem Pfeile von $\mathfrak{P}$ auch das Moment seinen Sinn umkehrt, damit sich von zwei Kräften, die sich an einem materiellen Punkte Gleichgewicht halten, auch die Momente gegen einander wegheben. Es ist also nur eine Frage der Zweckmässigkeit, wenn wir den jetzt aufzustellenden Begriff des statischen Moments oder des äusseren Products noch mit anderen Eigenschaften ausstatten.

So lange man es bei einer Aufgabe nur mit Kräften zu thun hat, die alle in einer Ebene enthalten sind und wenn man auch den Momentenpunkt nur in dieser Ebene wählt, kommt man damit aus, dem statischen Momente ausser der Grösse auch noch ein Vorzeichen zuzuschreiben. Dieses Vorzeichen wird nach dem geometrischen Zusammenhange in der Figur, gewöhnlich nach der Uhrzeigerregel, bestimmt. Man bemerkt z. B. in Abb. 8, dass sich ein Uhrzeiger OA, dessen Drehpunkt im Momentenpunkte O liegt und dessen Richtung mit dem Hebelarme $\mathfrak{r}$ zusammenfällt, unter dem Einflusse der Kraft $\mathfrak{P}$ in demselben Sinne drehen würde, wie in der Uhr selbst. Ein solches Moment rechnen wir positiv; bei Umkehrung des Pfeiles von $\mathfrak{P}$ würde die Kraft den Hebelarm, als Uhrzeiger betrachtet, rückwärts zu drehen suchen und das Moment wäre negativ zu rechnen.

Indessen ist leicht einzusehen, dass diese Festsetzung nicht nur ganz willkürlich ist — wogegen sich nichts einwenden liesse —, sondern dass sie auch noch nicht ausreichend zur eindeutigen Bestimmung des Momentenvorzeichens ist. Sobald es uns nämlich möglich ist, die Ebene, in der

die Kräfte $\mathfrak{P}$ enthalten sind, von beiden Seiten her zu betrachten, werden wir je nach dem Standpunkte, den wir einnehmen, das Moment derselben Kraft nach der Uhrzeigerregel bald als positiv bald als negativ bezeichnen. Man denke sich etwa Abb. 8 auf ein Stückchen Pauspapier gezeichnet; von vorn betrachtet hat $\mathfrak{P}$ positives Moment für den Momentenpunkt O, und sobald wir das Blättchen umwenden, erscheint dasselbe Moment negativ.

Bei den gewöhnlichen einfachen Anwendungen des Momentensatzes ist an dieser Unbestimmtheit freilich nicht viel gelegen. Es kommt dabei nur darauf an, einen Gegensatz im Momentenvorzeichen zwischen verschieden gerichteten Kräften hervorzuheben, wobei es gleichgültig bleibt, welche Richtung positiv und welche negativ ist. So lange man also während der Durchführung der Rechnung den Standpunkt, von dem aus man die Momentenvorzeichen feststellt, nicht wechselt, oder sich wenigstens nicht einfallen lässt, die etwa auf ein durchsichtiges Blatt gezeichnete Figur im Verlaufe der Rechnung einmal umzuwenden, kann man durch die vorhergehenden Festsetzungen nicht irre geführt werden. Es ist aber klar, dass wir uns hier nicht damit begnügen dürfen, den Momentenbegriff so zurecht zu schneiden, dass er grade nur für die einfachsten Fälle verwendbar ist, sondern dass wir suchen müssen, ihm ein möglichst weites Anwendungsgebiet zu sichern.

Das ist nun in der That leicht möglich. Wir brauchen nur das statische Moment oder, allgemeiner gesagt, das äussere Product zweier gerichteter Grössen selbst wieder als einen Vector aufzufassen, der senkrecht zu der durch diese beiden bestimmten Ebene steht und nach jener Richtung der Normalen gezogen ist, von der aus gesehen die Aufeinanderfolge beider Richtungen entweder mit dem Uhrzeigersinne übereinstimmt oder auch ihm entgegengesetzt ist. Die letzte Festsetzung ist wieder ganz willkürlich; sie kann aber ein für alle Male getroffen werden und gibt dann niemals wieder zu Zweifeln Veranlassung, von welcher Seite her man auch die Figur betrachten mag.

Wir entscheiden uns dafür, im Falle der Abb. 8 (S. 78) das Moment von $\mathfrak{P}$ als eine Strecke abzutragen, die senkrecht zur Papierfläche steht und dem Beschauer zugewendet ist. Die Grösse der Strecke ist so zu wählen, dass sie in einem passenden Maassstabe den doppelten Flächeninhalt des Momentendreiecks oder das Product $Pr \sin \varphi$ darstellt. Wir bezeichnen die Strecke als den Momentenvector. Alle Momentenvectoren von Kräften, die uns im Sinne des Uhrzeigers zu drehen scheinen, sind mit dem Pfeile auf den Beschauer zu gerichtet, die anderen erhalten den entgegengesetzten Pfeil. Denkt man sich auch jetzt wieder Abb. 8 auf ein durchsichtiges Blatt gezeichnet und sie von der Rückseite her betrachtet, so dreht $\mathfrak{P}$ jetzt entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn und der Pfeil des Momentenvectors ist daher dem Beschauer abgewendet anzunehmen. Diese Richtung des Momentenvectors stimmt aber genau mit jener überein, zu der wir geführt werden, wenn wir die Zeichnung von vorn betrachten, sie ist also jetzt ganz unabhängig von der zufälligen Aufstellung des Beobachters.

Auch für das äussere geometrische Product zweier gerichteter Grössen führen wir eine passende Bezeichnung ein. Wir dürfen aber jetzt nicht einfach $\mathfrak{P}\mathfrak{r}$ dafür schreiben, weil damit das innere Product gemeint wäre. Zur Unterscheidung von diesem schreiben wir das Operationszeichen V davor, setzen also für den Momentenvector $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} = V\mathfrak{P}\mathfrak{r}. \tag{46}$$

Gl. (46) fasst Alles, was bisher über den Begriff des statischen Moments auseinandergesetzt wurde, in einfacher Schreibweise zusammen.

In einer Beziehung besteht noch ein erheblicher Unterschied zwischen dem äusseren und dem früher betrachteten inneren Producte. Wir sahen nämlich früher, dass beide Factoren des inneren Products ganz in gleicher Art zur Bildung des Productwerthes beitragen, so dass es zulässig war, ihre Reihenfolge im Producte zu vertauschen. Beim äusseren Producte gilt dies aber nicht mehr. Wir fanden

zwar schon vorher, dass man zu dem gleichen Werthe $Pr \sin \varphi$ geführt wird, ob man nun die ganze Kraft mit der äusseren Componente des Hebelarms oder ob man den ganzen Hebelarm mit der äusseren Componente der Kraft multiplicirt. Auf den absoluten Werth des Products kann also die Vertauschung beider Factoren keinen Einfluss haben. Anders ist es aber mit der Richtung. Um sich davon zu überzeugen, stelle man sich vor, in Abb. 8 bedeute jetzt die Strecke $\mathfrak{r}$ eine Kraft und die Strecke $\mathfrak{P}$ einen Hebelarm. Beide Strecken liegen dann in der Abbildung noch nicht richtig zu einander, denn ein Hebelarm soll stets vom Momentenpunkte nach dem Angriffspunkte hin gerichtet sein und die Kraft ist am Angriffspunkte selbst abzutragen. Bei der Angabe eines Vectors kommt es aber immer nur auf dessen Grösse und Richtung und nicht auf seine absolute Lage an; wir können also durch parallele Verschiebung von $\mathfrak{r}$ die Figur leicht so einrichten, dass nachher in der That $\mathfrak{P}$ den Hebelarm einer durch $\mathfrak{r}$ dargestellten Kraft angibt. Sobald wir aber $\mathfrak{r}$ am Endpunkte des Hebelarms $\mathfrak{P}$ nach Grösse und Richtung antragen, bemerken wir, dass jetzt $\mathfrak{r}$ den Hebelarm $\mathfrak{P}$ in entgegengesetzter Richtung zu drehen sucht, wie vorher $\mathfrak{P}$ den Hebelarm $\mathfrak{r}$. Aus der axonometrischen Zeichnung in Abb. 9, in der dies ausgeführt ist und in der die Momentendreiecke für beide Fälle durch Schraffirung hervorgehoben sind, überzeugt man sich davon ohne Weiteres. Bei Vertauschung beider Factoren kehrt sich also die Richtung des Vectors, der das äussere Product darstellt, in die entgegengesetzte um. Wir können dies durch die Gleichung

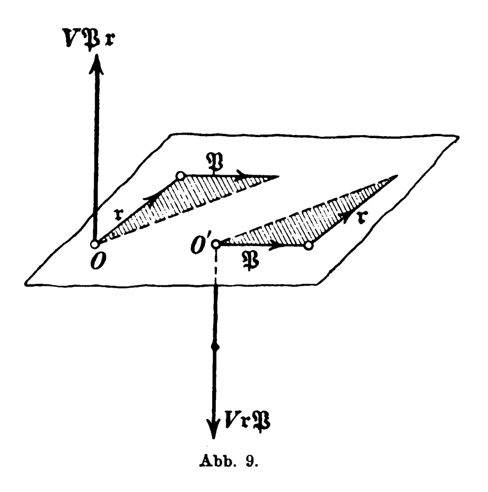


Abb. 9.

$$V\mathfrak{P}\mathfrak{r} = -V\mathfrak{r}\mathfrak{P} \tag{47}$$

zum Ausdrucke bringen. Die Reihenfolge der beiden Factoren im äusseren Producte ist also sehr wesentlich und man muss daher daran festhalten, dass das statische Moment stets durch das Product $V\mathfrak{P}\mathfrak{r}$ in dieser Reihenfolge der Factoren dargestellt werden soll.

Offenbar gilt diese Betrachtung und die aus ihr hervorgegangene Gleichung (47) ganz allgemein für das Product von irgend zwei gerichteten Grössen. Man thut aber in diesem Falle besser, die Richtung des äusseren Products noch mit anderen Worten, die freilich auf denselben Sinn hinauskommen, zu beschreiben. Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$ in Abb. 8 oder 9 zwei beliebige Vectoren, so soll, wie schon angegeben, $V\mathfrak{P}\mathfrak{r}$ mit dem Pfeile nach vorn bezw. oben gekehrt sein. Denken wir uns nun $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$ nicht wie in der vorigen Abbildung aufeinanderfolgend, sondern beide von demselben Anfangspunkte aus abgetragen und an demselben Anfangspunkte auch den Vector $V\mathfrak{P}\mathfrak{r}$ angesetzt wie es in Abb. 10 geschehen ist, so bildet die Aufeinanderfolge der Richtungen von $\mathfrak{P}$, von $\mathfrak{r}$ und von $V\mathfrak{P}\mathfrak{r}$, wie man sich ausdrückt, ein R e c h t s s y s t e m im Raume. Damit ist nämlich gemeint, dass eine Drehung aus der ersten Richtung in die zweite, verbunden mit einer Fortschreitung in der dritten Richtung zu einer rechtsgängigen Schraube führt. Würden wir die beiden ersten Richtungen miteinander vertauschen, die dritte aber unverändert lassen, so hätten wir ein Linkssystem vor uns, d. h. eines, das in der angegebenen Weise eine linksgängige Schraube bestimmt. Wenn wir nun sagen, dass sich bei einer Vertauschung der beiden Factoren die Richtung des äusseren Products umkehrt, so heisst dies nichts Anderes, als dass die Aufeinanderfolge der Richtungen des ersten Factors, des zweiten Factors und des Productwerthes in jedem Falle ein Rechtssystem im Raume bestimmen soll.

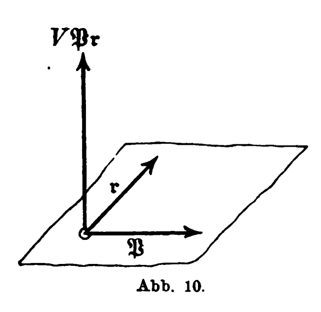


Abb. 10.

Dem Anfänger macht es leicht den Eindruck, als wenn die Schwierigkeit, die darin liegt, in jedem Falle den richtigen Pfeil des äusseren Products zu bestimmen, erst durch die Benutzung der Vectoren hereingetragen sei. Das ist aber ganz irrig. Der wesentliche Unterschied zwischen Rechtssystem und Linkssystem ist vielmehr in den allgemeinen geometrischen Eigenschaften des Raumes, in dem wir leben, begründet und er kann durch keine Art der Darstellung fortgeschafft werden. Man kann es daher nur als einen Vorzug unserer Darstellung betrachten, dass sie auf diesen wesentlichen Umstand die Aufmerksamkeit von vornherein hinlenkt.

Es wird nützlich sein, wenn ich den Gegensatz zwischen Rechtssystem und Linkssystem in unserem Raume noch an einigen Beispielen klar mache. Auf den Gegensatz zwischen rechtsgängiger und linksgängiger Schraube habe ich vorher schon hingewiesen und ihn zur Unterscheidung beider Systeme von einander benutzt. Es ist merkwürdig genug und zeigt, wie wenig die klare Auffassung räumlicher Beziehungen heute noch Gemeingut aller Gebildeten ist, dass Viele unter diesen kaum etwas davon wissen, dass sich Rechts- und Linksschrauben wesentlich von einander unterscheiden und dass sie sich namentlich auf keine Weise zur Deckung mit einander bringen lassen. Allgemeiner bekannt ist der Gegensatz zwischen der rechten und der linken Hand. Auch diese lassen sich nicht zur Deckung bringen; nur das Spiegelbild der linken Hand sieht so aus wie eine rechte Hand. In der That hat man auch bei der Aufstellung sogenannter „Handregeln“ oder „Daumenregeln“ die rechte oder linke Hand öfters dazu benutzt, den Gegensatz zwischen Rechts- und Linkssystem hervorzuheben. Man spreize etwa an der rechten Hand den Daumen ab, strecke den Zeigefinger grade aus und biege den Mittelfinger im rechten Winkel zur Handfläche. Die Fingerrichtungen bilden dann in der angegebenen Aufeinanderfolge ein Rechtssystem; gibt man den Fingern der linken Hand die gleichen Stellungen, so erhält man ein Linkssystem.

In der Geometrie der Ebene besteht kein solcher Gegen-

satz zwischen symmetrisch gestalteten Figuren, die sich nicht zur Deckung bringen liessen. So lange man freilich verhindert ist, die Figuren aus der Ebene herauszuheben, sie vielmehr nur innerhalb der Ebene verschieben darf, kann man z. B. zwei Dreiecke angeben, die in allen Stücken miteinander übereinstimmen und die auf diese Art doch nicht zur Deckung gebracht werden können. Man bezeichnet diese Figuren aber trotzdem als congruent, weil die Deckung sofort gelingt, wenn man die eine Figur aus der Ebene herausnimmt und sie auf die andere Seite wendet. Man hat schon öfters darüber nachgedacht, ob der Raum nicht etwa vier Dimensionen habe, von denen nur die eine unserer Beobachtung entgangen und die uns überhaupt unzugänglich wäre. Nimmt man dies an, so wäre zu schliessen, dass auch ein Rechtssystem mit einem Linkssysteme zur Deckung gebracht werden könnte, nämlich dadurch, dass man das eine aus dem dreifach ausgedehnten in den vierdimensionalen Raum hinaushebt, es dort umwendet und so in den dreidimensionalen Raum zurückführt.

Auch wenn man mit Coordinaten und Componenten anstatt mit den Vectoren rechnet, macht sich der Unterschied zwischen Rechts- und Linkssystem bemerklich und zwar schon bei der Wahl des dreiaxigen Coordinatensystems selbst. Man kann die drei Axen der XYZ so ziehen, dass sie in dieser Aufeinanderfolge entweder ein Rechtssystem oder ein Linkssystem miteinander bilden. Die erste Anordnung ist bei den englischen Physikern allgemein gebräuchlich, während die andere von den französischen Mathematikern durchweg angenommen ist. Man pflegt daher die beiden Coordinatensysteme auch als das englische und das französische zu bezeichnen oder auch, nach einer von Maxwell eingeführten Bezeichnung, als das Weincoordinatensystem und das Hopfencoordinatensystem, weil nämlich die Weinrebe sich in rechtsgängigen, die Hopfenpflanze sich in linksgängigen Schraubenlinien um eine Stütze schlingt.

In Deutschland hat sich kein bestimmter Gebrauch des einen oder des anderen Coordinatensystems allgemein eingebürgert. Man findet bald das eine und bald das andere

und leider findet man sehr oft auch gar keine Angabe darüber, auf welches Coordinatensystem sich eine Untersuchung beziehen soll. Wenn eine Zeichnung beigegeben ist, lässt sich freilich sofort feststellen, welches Coordinatensystem der Verfasser benutzt. Ich selbst bediene mich stets des englischen, rechtshändigen Coordinatensystems. In Abb. 11 sind die drei Axenrichtungen für dieses Coordinatensystem in axonometrischer Zeichnung angegeben; X geht nach vorn, Y nach rechts und Z nach oben.

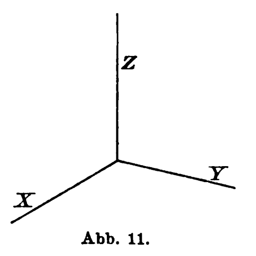


Abb. 11.

Mit Hülfe der schon in § 11 eingeführten Richtungsfactoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ kann man die Richtung des äusseren Products auch noch dadurch bezeichnen, dass man setzt

$$V\mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{k} \quad \text{und} \quad V\mathfrak{j}\mathfrak{i} = -\mathfrak{k};$$

denn in der That bildet bei der von uns getroffenen Wahl des Coordinatensystems die Aufeinanderfolge der Richtungen $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ ein Rechtssystem und ebenso auch die Aufeinanderfolge der drei Richtungen $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{i}$ und $-\mathfrak{k}$. Ein Rechtssystem bleibt übrigens ein solches, auch wenn man jede Axe durch die ihr folgende ersetzt; also auch YZX und ZXY sind Rechtssysteme, wenn XYZ eines war. Es ist nützlich, die äusseren Producte der drei Richtungsfactoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in allen möglichen Combinationen für den späteren Gebrauch zusammenzustellen. Man erhält so

$$\left.\begin{array}{lll} V\mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}; & V\mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{i}; & V\mathfrak{k}\mathfrak{i} = \mathfrak{j} \\ V\mathfrak{j}\mathfrak{i} = -\mathfrak{k}; & V\mathfrak{k}\mathfrak{j} = -\mathfrak{i}; & V\mathfrak{i}\mathfrak{k} = -\mathfrak{j} \end{array}\right\}. \tag{48}$$

Alle vorausgehenden Erörterungen dienten nur dazu, den Begriff des statischen Moments und damit zugleich den Begriff des äusseren Products in das rechte Licht zu setzen. Welcher Vortheil mit der Einführung dieser Begriffe verbunden ist, zeigt sich aber erst, wenn man den Multiplicationssatz für die äusseren Producte, der in der Mechanik speciell als Momentensatz bezeichnet wird, kennen gelernt hat. Ich beweise

diesen Satz zunächst für den Fall, dass die Kräfte — oder überhaupt die gerichteten Grössen, auf die man ihn anwenden will — alle in einer Ebene liegen. In Abb. 12 sei O der Momentenpunkt und A der Angriffspunkt der Kräfte $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ u. s. f., deren Resultirende $\mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{P}$ ist. Ich denke mir durch A eine Grade BB senkrecht zum Hebelarm $\mathfrak{r}$ gezogen und projicire auf sie alle Kräfte. Jene Kräfte, die den Hebelarm $\mathfrak{r}$ im Uhrzeigersinn zu drehen suchen, geben Projectionen auf BB, die ebenfalls nach rechts hinweisen, und die Projectionen der Kräfte mit negativem Moment gehen nach links. Nun folgt aber aus $\mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{P}$ auch

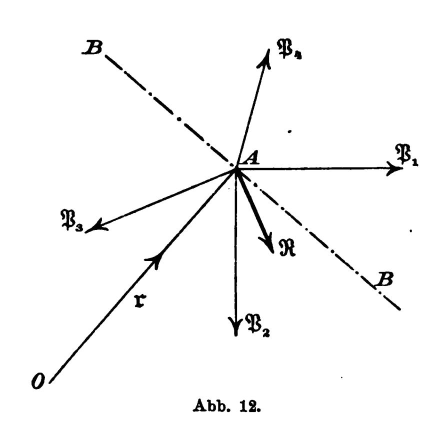


Abb. 12.

$$R' = \Sigma P',$$

wenn R' und P' die Projectionen auf die Grade BB bedeuten. Multiplicirt man diese Gleichung mit der Grösse r des Hebelarms, so erhält man

$$R'r = \Sigma P'r,$$

und jedes Glied dieser Gleichung gibt das statische Moment der zugehörigen Kraft an. Nach dem Begriffe des äusseren Products kann man daher für die letzte Gleichung auch schreiben

$$V \mathfrak{R} \mathfrak{r} = \Sigma V \mathfrak{P} \mathfrak{r}. \tag{49}$$

Das hier vorkommende Summenzeichen bedeutet, da es vor einer gerichteten Grösse steht, eigentlich eine geometrische Summirung. Im Falle der Abb. 12 stehen aber die Momentenvectoren alle senkrecht zur Zeichenebene, die von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ mit dem Pfeile nach vorn, die von $\mathfrak{P}_3$ und $\mathfrak{P}_4$ mit dem Pfeile nach hinten. Die geometrische Summirung von Grössen, die alle entweder gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, vereinfacht sich aber von selbst zu einer gewöhnlichen algebraischen

Summirung. Daher kommt es, dass man die statischen Momente so lange als gewöhnliche algebraische Producte auffassen kann, als man nur mit Kräften zu thun hat, die alle in einer Ebene enthalten sind.

Gl. (49) bleibt aber auch im allgemeineren Falle unverändert gültig; nur ist dann unter dem Σ eine geometrische Summirung zu verstehen, die sich nicht zu einer algebraischen vereinfacht, sondern wirklich als solche ausgeführt werden muss. Aus Abb. 13 wird dies sofort verständlich werden. Hier bedeutet wieder O den beliebig gewählten Momentenpunkt und A den Angriffspunkt der Kräfte $\mathfrak{P}$. Von diesen sind in die Figur nur die beiden ersten, $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, eingetragen; die übrigen möge man sich dazu denken und zwar mit ganz beliebigen durch den Punkt A gezogenen Richtungslinien. An Stelle der Graden BB in Abb. 12 ziehe ich hier die Ebene EE durch A senkrecht zum Hebelarm $\mathfrak{r}$ und projicire alle Kräfte auf sie. Dann folgt aus $\mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{P}$, wenn man die Projectionen auf EE durch einen angehängten Zeiger bezeichnet, nach § 12, Gleichung (37)

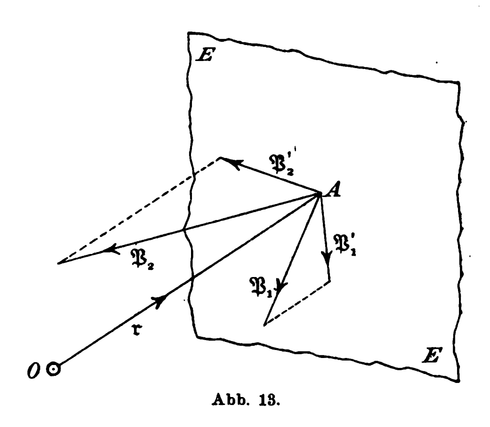


Abb. 13.

$$\mathfrak{R}' = \Sigma \mathfrak{P}',$$

woraus man nach Multiplication mit r auch

$$\mathfrak{R}'r = \Sigma \mathfrak{P}'r$$

erhält. Man betrachte jetzt das statische Moment der Kraft $\mathfrak{P}_1$ für den Momentenpunkt O. Mit $\mathfrak{P}_1'r$ stimmt es der Grösse nach überein. Die Richtung des Momentenvectors steht dagegen senkrecht zur Ebene durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{P}_1$ oder $\mathfrak{P}_1'$, also auch senkrecht zu $\mathfrak{P}_1'r$. Denken wir uns die Momentenvectoren

aller Kräfte von O aus abgetragen, so liegen sie sämmtlich in einer Ebene, nämlich in der zu $\mathfrak{r}$ senkrechten Ebene, denn jeder Momentenvector steht senkrecht zu dem für alle gemeinsamen Hebelarme $\mathfrak{r}$. Diese Ebene ist zugleich parallel zur Ebene EE. Die Momentenvectoren bilden daher einen Strahlenbüschel, der mit dem Strahlenbüschel der $\mathfrak{P}'r$ in der Ebene EE congruent ist. Die Strahlen des einen Büschels sind nur alle gegen die des anderen um einen rechten Winkel in demselben Sinne gedreht. Wenn daher in der Ebene EE, wie wir vorher zeigten, $\mathfrak{R}'r = \Sigma\mathfrak{P}'r$ ist, so muss auch in der dazu parallelen Ebene der Momentenvector von $\mathfrak{R}$ gleich der geometrischen Summe der Momentenvectoren der Kräfte $\mathfrak{P}$ sein, d. h.

$$V\mathfrak{R}\mathfrak{r} = \Sigma V\mathfrak{P}\mathfrak{r}$$

und hiermit ist Gl. (49) auch für diesen allgemeineren Fall als gültig bewiesen.

Wenn die Kräfte $\mathfrak{P}$ im Gleichgewichte miteinander stehen, verschwindet die Resultirende $\mathfrak{R}$ und der Momentensatz vereinfacht sich zu der Gleichung

$$\Sigma V\mathfrak{P}\mathfrak{r} = 0, \tag{50}$$

die für jeden beliebigen Momentenpunkt, also für jedes beliebige $\mathfrak{r}$ gültig ist.

Zugleich erkennt man, dass derselbe Beweis auch anwendbar bleibt, wenn die $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$ nicht Kräfte und einen Hebelarm bedeuten, sondern wenn sie beliebige gerichtete Grössen sind, die man ebenso wie jetzt die Kräfte durch Strecken in einem passenden Maassstabe zur Darstellung gebracht hat. Damit folgt, dass der wesentliche Inhalt des Satzes auch in der einfachen Aussage zusammengefasst werden kann: *Eine geometrische Summe wird mit einer beliebigen gerichteten Grösse auf äussere Art multiplicirt, indem man jedes Glied damit multiplicirt.* Der Momentensatz ist daher ebenso wie das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten nur ein Satz über die geometrische Multiplication gerichteter Grössen.

§ 17. Weitere Folgerungen aus dem Momentensatze.

Aus jeder Vectorgleichung von der Form $\mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{P}$, durch die $\mathfrak{R}$ als geometrische Summe der $\mathfrak{P}$ bezeichnet wird, kann man ähnliche Gleichungen zwischen den Projectionen dieser gerichteten Grössen auf irgend eine Ebene oder auf irgend eine Axe ableiten. Das gilt also auch von den Gleichungen (49) oder (50) zwischen den Momentenvectoren. Von besonderem Interesse sind hier die Projectionen der Momentenvectoren auf drei zu einander rechtwinkligen Axen, die durch den Momentenpunkt gezogen sind. Bei der Darstellung des Momentensatzes mit den Hülfsmitteln der analytischen Geometrie ist man nämlich genöthigt, jede Vectorgleichung durch drei Componentengleichungen zu ersetzen, die sich auf die drei Axenrichtungen beziehen. Man erhält diese Componentengleichungen ohne Weiteres durch Projection aller Glieder, die in der Vectorgleichung vorkommen, auf die betreffenden Coordinatenaxen.

Die Projection eines Momentenvectors auf eine durch den Momentenpunkt gezogene Axe wird auch gradezu das Moment der Kraft in Bezug auf diese Axe genannt. Diese Bezeichnung ist zulässig, weil die Projection des Momentenvectors auf die Axe in der That nur von der Lage dieser Axe und gar nicht von der Lage abhängt, die man dem Momentenpunkte auf der Axe geben mag. Man überzeugt sich davon leicht durch Betrachtung von Abbild. 14. In dieser ist O der Momentenpunkt, A der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{P}$, LL eine in beliebiger Richtung durch O gezogene Grade und $\varepsilon\varepsilon$ eine zu

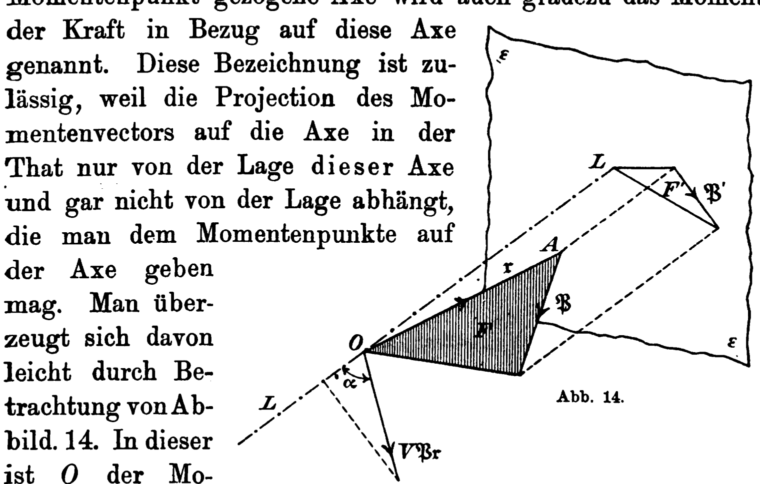


Abb. 14.

LL senkrecht gezogene Ebene, auf die auch das Momentendreieck durch rechtwinklige Projectionsstrahlen projicirt ist. Der Momentenvector $V\mathfrak{P}\mathfrak{r}$ ist ebenfalls in die Figur eingetragen und ebenso der Projectionsstrahl, durch den er auf LL projicirt wird. Wir können die Grösse des Momentenvectors durch den doppelten Flächeninhalt des Momentendreiecks, also, sagen wir, durch $2F$ zur Darstellung bringen. Die Projection auf LL wird daraus durch Multiplication mit dem Cosinus des Neigungswinkels α also gleich $2F \cos \alpha$ gefunden. Andererseits ist aber der Winkel zwischen zwei Ebenen so gross wie der Winkel zwischen ihren Normalen. Wir finden daher den Flächeninhalt der Projection des Momentendreiecks auf die Ebene $\varepsilon\varepsilon$, den wir mit F' bezeichnen wollen,

$$F' = F \cos \alpha$$

und der doppelte Inhalt dieses Dreiecks gibt daher zugleich die Projection des Momentenvectors auf die Axe LL an. Zugleich sieht man daraus, dass die Lage des Punktes O auf LL in der That ganz gleichgültig ist, denn wo O auch liegen möge, die Projection des Momentenvectors auf LL wird immer durch $2F'$ zur Darstellung gebracht und die Projection des Momentendreiecks auf die Ebene $\varepsilon\varepsilon$ bleibt ein für alle Male dieselbe, wenn wir O längs der Graden LL verschieben.

Diese Betrachtung gibt uns zugleich das einfachste Mittel an die Hand, um das statische Moment einer Kraft in Bezug auf eine beliebig gegebene Axe zu ermitteln. Man fertige eine Projection an auf einer Ebene, die senkrecht zur Axe steht, nehme den Punkt, in dem sich die Axe projicirt, als Momentenpunkt und bilde so das Moment der Projection $\mathfrak{P}'$ der Kraft $\mathfrak{P}$ auf die Ebene. Dieses ist zugleich das Moment der Kraft $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die gegebene Axe.

Auch für die auf Axen bezogenen Momente bleibt der Momentensatz gültig, wie schon aus den Bemerkungen zu Anfang dieses Paragraphen hervorgeht. Anstatt sich auf diese zu beziehen, kann man auch davon ausgehen, dass für die Kräfteprojectionen auf die Ebene $\varepsilon\varepsilon$ die Gleichung $\mathfrak{R}' = \Sigma \mathfrak{P}'$

gilt und dass diese auch gültig bleibt, wenn man jedes Glied mit irgend einem Hebelarme $\mathfrak{r}$ auf äussere Art multiplicirt. Man erhält so

$$\mathrm{V}\mathfrak{R}'\mathfrak{r} = \Sigma\mathrm{V}\mathfrak{P}'\mathfrak{r} \qquad (51)$$

und jedes Glied dieser Gleichung stellt das Moment einer Kraftprojection in Bezug auf einen Punkt der Projectionsebene dar, von dem man den Hebelarm $\mathfrak{r}$ gezogen hatte, also zugleich auch das Moment der betreffenden Kraft selbst in Bezug auf die Axe, die sich in jenem Punkte projicirt. Die Summirung in Gl. (51) vereinfacht sich dabei zu einer algebraischen. Wenn Kräfte an einem Punkte im Gleichgewichte stehen, ist für jede beliebige Projectionsebene und für jeden in dieser Ebene gelegenen Momentenpunkt die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfteprojectionen gleich Null. Oder auch mit anderen Worten: für jede beliebige Momentenaxe ist die algebraische Summe der statischen Momente von Kräften, die sich an einem Punkte das Gleichgewicht halten, gleich Null.

Für den Gebrauch der Coordinatenmethode berechnet man die Momente einer Kraft $\mathfrak{P}$ mit den Componenten XYZ nach den drei Coordinatenaxen auf folgende Art. Der Radiusvector vom Ursprunge nach dem Angriffspunkte sei $\mathfrak{r}$ und seine Componenten, d. h. die Coordinaten des Angriffspunktes, seien xyz. Das Moment $\mathrm{V}\mathfrak{P}\mathfrak{r}$ für den Ursprung lässt sich dann in der Form

$$\mathrm{V}\mathfrak{P}\mathfrak{r} = \mathrm{V}(\mathfrak{i}X + \mathfrak{j}Y + \mathfrak{k}Z)(\mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z)$$

anschreiben. Wir wissen schon, dass die geometrische Multiplication einer Summe nach den gewöhnlichen Multiplicationsregeln der Algebra ausgeführt werden kann. Die Ausdehnung dieser Regel auf die Multiplication zweier geometrischer Summen miteinander folgt daraus sofort, denn dabei handelt es sich nur um die zweimalige Anwendung desselben Satzes. Im Ganzen erhalten wir also bei der Ausführung der vorstehenden Multiplication 9 Glieder, von denen aber drei verschwinden. Denn das geometrische Product aus zwei gleichgerichteten

Gliedern wie $\mathfrak{i}X$ und $\mathfrak{i}x$ ist nach dem Begriffe des äusseren Products gleich Null. Bei allen anderen Gliedern sind zwei aufeinander senkrecht stehende Vectoren miteinander zu multipliciren. Die Grösse des äusseren Products ist daher in diesen Fällen gleich dem gewöhnlichen Producte aus den Grössen der beiden Factoren und die Richtung ergibt sich aus den in den Gleichungen (48) zusammengestellten Beziehungen. Im Ganzen erhalten wir daher nach Ausführung der Multiplication

$$V\mathfrak{P}\mathfrak{r} = \mathfrak{i}(Yz - Zy) + \mathfrak{j}(Zx - Xz) + \mathfrak{k}(Xy - Yx). \quad (52)$$

Auch hier erkennen wir wieder, dass die Betrachtung gültig bleibt, wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$ beliebige gerichtete Grössen bedeuten. Um dies auch äusserlich hervorzuheben, schreibe ich jetzt $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ an Stelle von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{r}$ und bezeichne die Componenten nach den Coordinatenaxen mit $A_1 A_2$ u. s. f. Dann wird aus Gl. (52)

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{i}(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathfrak{j}(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathfrak{k}(A_1 B_2 - A_2 B_1).$$

Das Bildungsgesetz wird übersichtlicher, wenn man die Gleichung in Form einer Determinante anschreibt, nämlich

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \quad (53)$$

Um jetzt speciell wieder zum statischen Momente zurückzukehren, bezeichne ich die Componenten von $V\mathfrak{P}\mathfrak{r}$ nach den Coordinatenaxen mit $M_1 M_2 M_3$. Dann hat man

$$M_1 = Yz - Zy; \quad M_2 = Zx - Xz; \quad M_3 = Xy - Yx. \quad (54)$$

Diese Grössen sind die Projectionen von $V\mathfrak{P}\mathfrak{r}$ auf die Coordinatenaxen und daher zugleich die Momente der Kraft $\mathfrak{P}$ in Bezug auf die Coordinatenaxen.

Zugleich mache ich noch darauf aufmerksam, dass diese Ausdrücke nur so lange gültig sind, als das Coordinatensystem ein Rechtssystem ist. Wählt man ein Linkssystem und behält alle übrigen Festsetzungen bei, so kehren sich die Vorzeichen der Momente um. Die Vernachlässigung der Angabe

über die Art des Coordinatensystems führt daher leicht zu Vorzeichenfehlern und in der That sind die Fälle gar nicht selten, bei denen die Ausserachtlassung dieses Umstandes selbst in sonst sehr bedeutenden Arbeiten zu solchen Fehlern geführt hat.

Bei der Ableitung der Gleichungen (54) bin ich von der Darstellung des Moments nach der Vectormethode ausgegangen. Man kann diese aber auch ganz umgehen. Um z. B. M_1 zu finden, kann man die Kraft $\mathfrak{P}$ zunächst auf die zur X-Axe senkrechte YZ-Ebene projiciren. Die Projection lässt sich in die Componenten Y und Z zerlegen. Von beiden nimmt man die Momente in Bezug auf den Ursprung und die algebraische Summe beider Momente liefert nach dem, was ich im Anschlusse an Abb. 14 auseinandersetzte, das Moment von $\mathfrak{P}$ für die X-Axe. Aus Abb. 15, die die besprochene Projection auf die YZ-Ebene zeigt, erkennt man sofort, dass die Componente Y ein positives, die Componente Z dagegen ein negatives Moment in Bezug auf O liefert. Wir erhalten daher in Uebereinstimmung mit der vorhergehenden Entwicklung

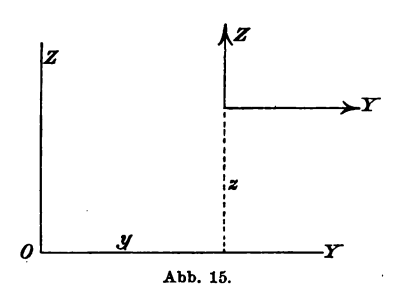


Abb. 15.

$$M_1 = Yz - Zy.$$

Diese Ableitung ist kürzer als die vorige; ich habe aber jene vorangestellt, weil der durch Gl. (53) ausgesprochene Satz zugleich allgemein auf alle äusseren Producte gerichteter Grössen anwendbar ist.

§ 18. Bewegung auf vorgeschriebener Bahn.

Auf einen materiellen Punkt mögen gewisse unmittelbar gegebene Kräfte einwirken, die wir uns zu einer Resultirenden zusammengefasst denken wollen. Ausserdem soll dem Punkte

durch eine geeignete Construction, die man gewöhnlich als eine „Führung“ bezeichnet, die Bedingung vorgeschrieben sein, dass er entweder auf einer Fläche oder auf einer Linie bleiben muss. Die Bewegung, die er in diesem Falle ausführt, wird als eine solche auf vorgeschriebener Bahn bezeichnet.

Die Resultirende der unmittelbar gegebenen Kräfte sei als die an dem Punkte angreifende „äussere“ Kraft bezeichnet. Auch die Einwirkung der Führung oder der Bahn auf den materiellen Punkt kann nur darin bestehen, dass von ihr eine Kraft auf den materiellen Punkt übertragen wird; denn jeder Einfluss, der auf den Bewegungszustand eines materiellen Punktes ausgeübt wird, fällt nach dem Grundsatze, dass alle Bewegungsursachen an sich von gleicher Art sind, unter den Begriff der Kraft. Diese Kraft wird als „Zwangskraft“ oder als „Kraft des Systems“ oder auch, im Gegensatze zu der von anderen Umständen herrührenden äusseren, als „innere“ Kraft bezeichnet. Wir können die Führung auch ganz weglassen und die Bewegung des Punktes als eine „freie“, also sie so wie früher betrachten, wenn wir nur die innere Kraft, die von ihr herrührte, beibehalten.

Man denke sich die Zwangskraft in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine in die Richtung der Bahn fällt, während die andere zu ihr senkrecht steht. Die erste Componente wird die von der Bahn auf den materiellen Punkt übertragene Reibung genannt. Durch geeignete Mittel, wie Verwendung von Rädern oder Rollen oder durch Aufhängung an Fäden oder Schneiden, kann man in vielen Fällen die Reibung sehr herabmindern, so dass man dem wirklichen Vorgange schon ziemlich nahe kommt, wenn man sie ganz vernachlässigt. In einem späteren Abschnitte werde ich auf die Reibung näher eingehen. Hier soll dagegen nur von solchen Fällen die Rede sein, bei denen die Reibung hinreichend klein ist, um von ihr absehen zu können. Als Systemkraft bleibt dann nur die Normalcomponente übrig.

Zur Rechtfertigung dafür, dass man sich zunächst nur auf die Behandlung der in dieser Weise vereinfachten Aufgabe

einlässt, mache ich übrigens darauf aufmerksam, dass die Normalkraft schon vollständig genügt, um die Einhaltung der Bahn zu erzwingen. Denn eine Abweichung von der Bahn, also ein seitliches Heraustreten, würde darauf hinauslaufen, dass noch eine Bewegungscomponente in der Richtung der Normalen zu der wirklich ausgeführten Bewegung hinzukäme. Eine solche Bewegungscomponente kann aber schon durch die Normalcomponente der Zwangskraft vollständig verhindert werden. Dem gegenüber spielt die Reibung nur eine mehr zufällige Rolle und ihr absoluter Betrag hängt, wie schon bemerkt, von mancherlei Nebenumständen, namentlich auch von dem Rauhigkeitsgrade der sich in der Führung berührenden Oberflächen ab. Man kann sie sich wenigstens in der Vorstellung durch die Anwendung absolut glatter Oberflächen beseitigt denken. Die Untersuchung der reibungsfreien Bewegung kommt dann darauf hinaus, dass man einen freilich nicht ganz genau zu verwirklichenden einfachen Fall an die Spitze stellt, der geeignet ist, eine Norm abzugeben, an die man sich bei der Beurtheilung verwickelterer Erscheinungen halten kann. Es bleibt nachher nur noch übrig, die im gegebenen Falle zu erwartenden Abweichungen von jener Norm gesondert zu untersuchen und darin liegt in der That sehr häufig eine Erleichterung der ganzen Aufgabe.

Die Normalkraft, die jetzt als Zwangskraft allein übrig bleibt, ist ihrer Grösse nach nicht gegeben. Dafür kennt man aber die Bahn, die der Punkt einschlägt und aus dieser Bedingung kann man immer in einfacher Weise sowohl die Grösse der Zwangskraft als auch den zeitlichen Verlauf der Bewegung bei gegebener äusserer Kraft ermitteln. Ich werde dies zunächst an zwei einfachen Beispielen zeigen.

In Abb. 16 sei BC eine schiefe Ebene, auf der sich der materielle Punkt A längs einer Graden bewegen muss. Als äussere Kraft möge jetzt nur das Gewicht $\mathfrak{Q}$ des materiellen Punktes in Betracht kommen. Dazu kommt die der Grösse nach vorläufig unbekannte Normalkraft $\mathfrak{N}$. Die Resultirende aus $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{N}$ sei mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet. Da wir schon wissen,

dass sich der materielle Punkt unter dem Einflusse dieser Resultirenden längs der Graden BC bewegt, kann $\mathfrak{R}$ keine Normalcomponente zur Bahn besitzen; es muss also parallel zur Bahn sein. Ausserdem ist $\mathfrak{R}$ gleich der geometrischen Summe von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{Q}$. Es muss sich also aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{Q}$ ein Kräftedreieck zeichnen lassen, von dem eine Seite,

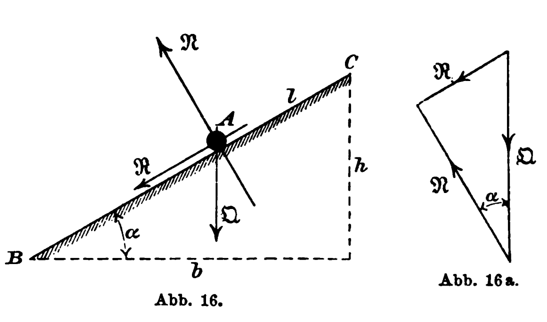


Abb. 16.

Abb. 16a.

nämlich $\mathfrak{Q}$ nach Grösse und Richtung bekannt ist, während man von den beiden anderen Seiten wenigstens die Richtungen kennt. Damit ist das Dreieck vollständig bestimmt und es konnte in Abb. 16a unter Zugrundelegung eines beliebigen Kräftemaassstabs gezeichnet werden. Die Grössen von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}$ können daraus abgegriffen werden; ausserdem kann man sie nachträglich auch leicht berechnen, denn aus dem rechtwinkligen Dreiecke mit dem Winkel α zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Q}$ erhält man

$$N = Q \cos \alpha; \quad R = Q \sin \alpha.$$

Die Zwangskraft N interessirt nicht weiter. Für R kann man auch

$$R = Q \frac{h}{l}$$

setzen, wenn man beachtet, dass der Winkel α auch in dem aus den Seiten b, h und l zusammengesetzten Dreiecke der schiefen Ebene vorkommt. Da R constant ist, so lange sich der Punkt auf der schiefen Ebene bewegt, folgt, dass die Bewegung gleichförmig beschleunigt ist. Die Beschleunigung ist gleich $g \frac{h}{l}$. Will man den materiellen Punkt auf der schiefen Ebene im Gleichgewichte halten, so dass er entweder in Ruhe bleibt oder eine Bewegung mit constanter Geschwindig-

keit ausführt, so muss man noch eine äussere Kraft anbringen. Wählt man diese parallel zur schiefen Ebene, so muss sie gleich R und diesem entgegengesetzt gerichtet sein. R gibt daher zugleich die Grösse der Zugkraft an, die man aufwenden muss, um etwa ein Fuhrwerk auf der schiefen Ebene mit gleichförmiger Geschwindigkeit hinaufzuschaffen. Auf die Reibung ist dabei freilich noch keine Rücksicht genommen.

Eisenbahnen oder Strassen, für die man die erforderliche Zugkraft berechnen will, sind gewöhnlich nur wenig gegen den Horizont geneigt. Infolgedessen weicht die Länge l der schiefen Ebene nur wenig von ihrer Horizontalprojection b ab. Man begeht daher nur einen geringen Fehler, wenn man an Stelle der vorigen Gleichungen

$$R = Q \operatorname{tg} \alpha = Q \frac{h}{b}$$

setzt. Gewöhnlich macht man lieber von dieser, freilich nicht ganz genauen Formel Gebrauch, weil das Verhältniss $h : b$ eine einfache Bedeutung hat. Man bezeichnet es als das Steigungsverhältniss oder auch als das Gefäll der schiefen Ebene. Wenn also z. B. bekannt ist, dass eine Eisenbahnstrecke in der Steigung $1 : 100$ liegt, so weiss man sofort, dass die erforderliche Zugkraft jene auf der horizontalen Strecke um ein Procent des Gewichtes übersteigt. Der Fehler, den man dabei begeht, ist ganz unerheblich. Man braucht auf ihn um so weniger zu achten, als man ohnehin nicht ganz genau weiss, wie gross die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Zugkraft ist. Bei gewöhnlichen Eisenbahnen liegt diese zwischen etwa $\frac{1}{400}$ bis $\frac{1}{200}$ des Zuggewichtes, je nachdem das Gleis mehr oder weniger gut unterhalten ist.

Als zweites Beispiel betrachte ich das in kreisförmiger Bewegung begriffene Centrifugalpendel. Ein materieller Punkt sei an einem gewichtslos zu denkenden Faden aufgehängt. Es wird ihm dadurch zunächst eine Bewegung auf einer Kugeloberfläche vorgeschrieben, deren Mittelpunkt der Aufhängepunkt und deren Halbmesser gleich der Fadenlänge ist. Dadurch ist die Bahn des Punktes noch nicht völlig bestimmt; sie kann

noch irgend eine auf der Kugelfläche liegende Curve sein. In der That erfordert auch die Untersuchung des allgemeinsten Falles, bei dem die Anfangsgeschwindigkeit nach Grösse und Richtung auf der Kugeloberfläche beliebig gegeben ist, die Anwendung eines sehr ausgedehnten mathematischen Apparates, nämlich die Benutzung der sogenannten elliptischen Functionen. Von diesen kann ich hier nichts als bekannt voraussetzen und ich beschränke mich daher auf die Untersuchung des einfachsten Falles, der im Gegensatze zu jenem sehr leicht erledigt werden kann.

Zu den möglichen Bahnen gehört nämlich jedenfalls auch eine kreisförmige, deren Mittelpunkt auf der durch den Aufhängepunkt gezogenen Lothlinie liegt. Damit sie eingeschlagen werde, muss der materielle Punkt zu Anfang der Bewegung schon eine Geschwindigkeit in der Richtung der Tangente besitzen, deren Grösse sich aus der Rechnung leicht ergibt. In Abb. 17 ist das Centrifugalpendel in einer seiner Stellungen gezeichnet; r ist der Halbmesser des Kreises, den der materielle Punkt auf der Kugeloberfläche beschreibt. Die Fadenspannung $\mathfrak{F}$ fällt in die Richtung des Fadens, also in die Normale der Kugelfläche. Von Luftwiderstand u. dgl. wird abgesehen. $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{Q}$ geben eine Resultirende $\mathfrak{R}$, die in der durch beide gelegten lothrechten Ebene enthalten sein muss. Daraus folgt, dass $\mathfrak{R}$ keine Componente in der Richtung der Tangente an die Bahn haben kann. Die Geschwindigkeit kann sich also bei der von uns betrachteten Bewegung nur der Richtung und nicht der Grösse nach ändern. Die Resultirende $\mathfrak{R}$ ist die Centripetalkraft der Bewegung; sie muss daher nach dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn, also horizontal gerichtet sein. Man kann nun aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{Q}$ ein Kräftedreieck zeichnen. Daraus findet man

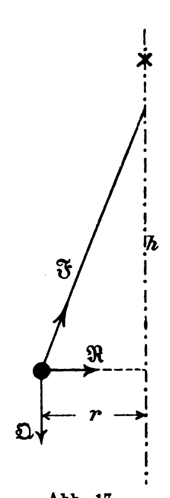


Abb. 17.

$$R = Q\frac{r}{h}.$$

Andererseits hat man aber für die Centripetalkraft nach Gl. (41)

$$R = \frac{Qv^2}{gr}$$

und wenn man beide Werthe einander gleichsetzt und nach v auflöst, erhält man

$$v = r\sqrt{\frac{g}{h}}.$$

So gross muss also die Geschwindigkeit v sein, wenn das Centrifugalpendel den Kreis vom Radius r durchlaufen soll. Man kann der letzten Beziehung noch einen bequemeren Ausdruck geben, indem man die Schwingungsdauer T, d. h. die zum einmaligen Durchlaufen des ganzen Kreises erforderliche Zeit berechnet. Man findet dafür

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

So lange die Ausschläge r nur klein sind, unterscheidet sich h nur wenig von der Fadenlänge; es nimmt daher anfangs auch nur wenig ab, wenn man r vergrössert. Die Schwingungsdauer ist demnach für alle kreisförmigen Bahnen von nicht zu grossen Halbmessern fast gleich gross oder die Schwingungen sind, wie man sagt, nahezu isochron.

Nahezu gelten diese Betrachtungen auch noch, wenn man den gewichtslosen Faden durch eine Stange ersetzt, an deren unterem Ende eine grössere Kugel angeschraubt ist. Oben möge die Stange durch ein Gelenk an einer verticalen Welle drehbar befestigt sein, wie bei dem bekannten Watt'schen Centrifugalregulator. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Welle dreht, drückt man entweder dadurch aus, dass man angibt, wie viele Umdrehungen n sie in der Minute ausführt, oder auch durch den in einer Secunde durchlaufenen Winkel u. Diese Grösse heisst die Winkelgeschwindigkeit der Welle. Zwischen u und n besteht, wie man leicht sieht, der Zusammenhang

$$u = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

Die Winkel sind dabei in Bogenmaass ausgedrückt. Man findet

den dazu gehörigen Bogen durch Multiplication mit dem Halbmesser, also $v = ur$ und hiernach, mit Benutzung der vorhergegangenen Formel für v

$$u = \sqrt{\frac{g}{h}} \text{ oder } h = \frac{g}{u^2}.$$

Da h nicht grösser als die Pendellänge l sein kann, muss die Welle mindestens die Winkelgeschwindigkeit

$$u_{\min} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

besitzen, wenn überhaupt ein Ausschlag des Centrifugalpendels erfolgen soll. Bei kleineren Geschwindigkeiten hängt das Pendel lothrecht herab; für grössere Winkelgeschwindigkeiten findet man die zugehörige Pendelstellung aus der Formel für h.

Man kann diese Betrachtungen leicht auch auf den Fall ausdehnen, dass der Drehpunkt der Pendelstange nicht auf der Mittellinie, sondern etwas seitlich davon liegt, wie es bei den meisten neueren Pendelregulatoren der Fall ist.

Nach Durchführung dieser Beispiele komme ich jetzt noch einmal auf das allgemeine Verfahren zurück, das in jedem Falle einer Bewegung auf vorgeschriebener Bahn zum Ziele führt. Wenn die Bahn vollständig gegeben, der materielle Punkt also so geführt ist, dass er auf einer gegebenen Linie bleiben muss, beachte man, dass sich in jedem Augenblicke die Resultirende $\mathfrak{R}$ aus der äusseren Kraft $\mathfrak{Q}$ und der Zwangskraft $\mathfrak{N}$ aus einer nach dem Krümmungsmittelpunkte gerichteten Centripetalkraft und einer Tangentialkraft zusammensetzen muss. Die Tangentialkraft ist einfach die Tangentialcomponente von $\mathfrak{Q}$. Die Grösse der Centripetalkraft folgt aus der für sie in § 14 aufgestellten Formel. Man erhält daher auch $\mathfrak{N}$ nach Grösse und Richtung aus der Bedingung, dass die Resultirende aus $\mathfrak{N}$ und der Normalcomponente der gegebenen Kraft $\mathfrak{Q}$ die der Grösse und Richtung nach bereits bekannte Centripetalkraft liefern muss. Die Richtung von $\mathfrak{N}$ muss nämlich deshalb erst noch näher aus dieser Bedingung ermittelt werden weil zu einer Curve in jedem Punkte unendlich viele Nor-

malenrichtungen gehören, die alle in der Normalebene enthalten sind.

Im anderen Falle, wenn also dem Punkte nur eine Fläche vorgeschrieben ist, auf der er bleiben muss, kennt man die Richtungslinie von $\mathfrak{N}$ von vornherein, da eine Fläche in jedem Punkte (von Ausnahmefällen, die hier nicht in Frage kommen, abgesehen) nur zwei auf derselben Graden liegende Normalenrichtungen zulässt. Die Projection der äusseren Kraft $\mathfrak{Q}$ auf die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gibt auch jetzt wieder die Tangentialcomponente an, von der die Aenderung der Grösse der Geschwindigkeit abhängt. Denkt man sich ferner durch die Richtungslinie von $\mathfrak{v}$ einen Ebenenbüschel gelegt, so erhält man eine Schaar von Schnittcurven der Ebenen dieses Büschels mit der Fläche und zu jeder Schnittcurve kann man den Krümmungshalbmesser, also auch die Grösse der Centripetalkraft angeben, die an dem Punkte angreifen muss, wenn diese Ebene die Schmiegungsebene der Bahn sein soll. Alle hiernach als möglich in Betracht zu ziehenden Centripetalkräfte liegen in der senkrecht zu $\mathfrak{v}$ stehenden Normalebene der Fläche, ebenso auch $\mathfrak{N}$ und die Normalcomponente von $\mathfrak{Q}$. Die Grösse von $\mathfrak{N}$ ist jetzt durch die Bedingung bestimmt, dass die Resultirende aus ihr und der Normalcomponente von $\mathfrak{Q}$ mit einer der vorher untersuchten Centripetalkräfte nach Grösse und Richtung übereinstimmen muss. Sobald aber $\mathfrak{N}$ bekannt ist, folgt daraus auch die Lage der Schmiegungsebene und die Krümmung der Curve an der betrachteten Stelle. Wenn die äussere Kraft $\mathfrak{Q}$ gleich Null ist, bildet die durch $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{v}$ gelegte Normalebene der Fläche die Schmiegungsebene der Bahn und die hierdurch näher bestimmte Bahn des materiellen Punktes ist eine sogenannte geodätische Linie der Fläche. Die wirkliche Ausrechnung nach dem hier nur ganz im Allgemeinen geschilderten Plane erfordert ziemlich umfangreiche mathematische Hülfsmittel; sie setzt die Kenntniss der Krümmungstheorie der Flächen und der Lehre von den Differentialgleichungen voraus. Deshalb gehe ich hier nicht weiter darauf ein; ich bemerke nur noch, dass es auch noch einen

anderen, von Lagrange angegebenen Weg zur Lösung der Aufgabe gibt, der aber ebenfalls zu viel mathematische Schwierigkeiten in sich schliesst, als dass ich mich in dieser zur ersten Einführung in die Mechanik bestimmten Vorlesung mit ihm beschäftigen könnte. Ueberdies ist auch vom Standpunkte der technischen Anwendungen aus der praktische Werth dieser ganz allgemein gehaltenen Untersuchungen ziemlich gering und es lohnt sich schon aus diesem Grunde nicht, viel Zeit auf sie zu verwenden.

Aufgaben.

1. *Aufgabe. Ein Eisenbahnzug von 120000 kg Gewicht (ohne die Locomotive) soll beim Anfahren in 45 Secunden die Geschwindigkeit von* $15 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ *erreichen. Wie gross muss die durch die Zugkette von der Locomotive auf den Zug übertragene Kraft sein, wenn die Reibung gleich 0,005 des Gewichtes gesetzt werden kann?*

Lösung. Die Beschleunigung b, die dem Zuge ertheilt werden soll, ist

$$b = \frac{v - v_0}{t} = \frac{15 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}}{45\,\mathrm{sec}} = \frac{1}{3} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}.$$

Die Kraft P wird daraus durch Multiplication mit der Masse gefunden; die Masse ist aber

$$m = \frac{Q}{g} = \frac{120\,000\,\mathrm{kg}}{9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}} = 12\,230 \frac{\mathrm{kg\,sec}^2}{\mathrm{m}}$$

und demnach die beschleunigende Kraft P

$$P = mb = 12\,230 \frac{\mathrm{kg\,sec}^2}{\mathrm{m}} \cdot \frac{1}{3} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} = 4080\ \mathrm{kg}.$$

Hierzu kommt aber noch die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Zugkraft von $0{,}005 \cdot 120000 = 600$ kg. Im Ganzen hat man also

$$\text{Zugkraft} = 4680\ \mathrm{kg}.$$

2. *Aufgabe. Wie lange dauert es, bis ein sich selbst überlassener Eisenbahnwagen auf horizontaler grader Strecke zur Ruhe kommt, wenn nur die gewöhnliche Reibung (so hoch wie vorher berechnet) in Betracht kommt und die Anfangsgeschwindigkeit* $= 6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ *war, und welche Strecke durchläuft er noch?*

Lösung. Die Bewegung ist eine gleichförmig verzögerte; die verzögernde Kraft ist die Reibung, die nach der Angabe der vorhergehenden Aufgabe mit $\frac{1}{200}$ des Gewichtes in Rechnung gestellt werden sollte. Die Verzögerung, die sie hervorbringt, beträgt dann auch $\frac{1}{200}$ von der Beschleunigung der Schwere, also

$$b = \frac{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}}{200} = 0{,}049\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}\,.$$

Nach der ersten der Gleichungen (13) für die gleichförmig verzögerte Bewegung ist

$$v = v_0 - bt \quad \text{oder hier} \quad v_0 = bt\,.$$

Damit findet man die Zeit, die bis zum Stillstande verläuft,

$$t = \frac{v_0}{b} = \frac{6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}}{0{,}049\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}} = 122\,\mathrm{sec}\,.$$

Der bis dahin noch zurückgelegte Weg wird, nachdem t bekannt ist, am einfachsten aus

$$s = \frac{v_0}{2}\,t = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \cdot 122\,\mathrm{sec} = 366\,\mathrm{m}$$

berechnet. Man kann ihn aber auch unmittelbar aus

$$s = \frac{v_0^{\,2}}{2b} = \frac{36\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{sec}^2}}{0{,}098\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}} = 366\,\mathrm{m}$$

berechnen.

3. *Aufgabe. Zur Steuerung einer Dampfmaschine von 900* mm *Kolbenhub, die 100 Umdrehungen in der Minute macht, gehört ein Einlassventil, das bei 45%* *des Kolbenwegs einen Hub von 21* mm *hat und während der hierauf folgenden 12%* *des Kolbenhubs in Folge des Eigengewichts von 3,2 kg und unter Mitwirkung einer Feder auf seinen Sitz niedergedrückt werden muss. Wie gross muss die Federspannung sein? (Siehe W. Trinks, Zeitschr. des V. D. I. 1898, S. 1163.)*

Lösung. Die Kolbengeschwindigkeit während der Zeit des Ventilschlusses berechnet sich zu

$$\frac{\pi \cdot 0{,}9\,\mathrm{m} \cdot 100}{60\,\mathrm{sec}} = 4{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$$

und hieraus die Zeit t des Ventilschlusses zu

$$t = \frac{0,12 \cdot 0,9 \text{ m}}{4,7 \frac{\text{m}}{\text{sec}}} = 0,023 \text{ sec}.$$

Die Beschleunigung b folgt aus Gl. (12) mit $v_0 = 0$

$$b = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 0,021 \text{ m}}{(0,023 \text{ sec})^2} = 79,5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

und hieraus die beschleunigende Kraft nach Gl. (7)

$$P = 3,2 \text{ kg} \cdot \frac{79,5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}} = 26 \text{ kg}.$$

Hiervon liefert das Eigengewicht des Ventils 3,2 kg, so dass auf die Federspannung noch 22,8 kg kommen.

4. *Aufgabe. Aus einer Höhe von 300* m *fallen nacheinander zwei Wassertheilchen herab. Das erste ist schon* $\frac{1}{1000}$ mm *gefallen, ehe das zweite von derselben Stelle aus zu fallen beginnt. Wie gross wird der Abstand beider Theilchen am Ende der Fallhöhe, wenn auf Luftwiderstand u. s. f. keine Rücksicht genommen wird?*

Lösung. Die anfängliche Entfernung von $\frac{1}{1000}$ mm zwischen beiden Theilchen sei mit e bezeichnet, der Weg, den das zweite Theilchen zurücklegt, mit s und der Weg des ersten Theilchens mit s', beide Wege vom obersten Punkte aus gerechnet. Die Differenz $\Delta s = s' - s$ gibt dann den gesuchten Abstand am Ende der Fallhöhe an. Schliesslich sei noch die Zeit, die das erste Theilchen braucht, um die kleine Strecke e zu durchfallen mit Δt und die Zeit, die das zweite Theilchen nöthig hat, um den Weg s zu durchlaufen, mit t bezeichnet. Dann ist das zweite Theilchen während der Zeit $t + \Delta t$ unterwegs, bis es die Strecke s' durchfallen hat.

Nach der zweiten Formel für die gleichförmig beschleunigte Bewegung hat man dann

$$s = \frac{gt^2}{2} \quad \text{und} \quad s' = g\frac{(t + \Delta t)^2}{2}.$$

Hiernach wird

$$\Delta s = s' - s = gt\Delta t + g\frac{\Delta t^2}{2}.$$

Andererseits ist aber

$$e = g\frac{\Delta t^2}{2}$$

und wenn man diese Gleichung mit der für s multiplicirt, erhält man

$$es = \left(\frac{gt\Delta t}{2}\right)^2 \quad \text{oder} \quad gt\Delta t = 2\sqrt{es}.$$

Setzt man dies ein, so vereinfacht sich Δs zu

$$\Delta s = e + 2\sqrt{es},$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Setzt man die hier speciell angegebenen Zahlenwerthe $e = 0{,}001$ mm, $s = 300000$ mm ein, so erhält man

$$\Delta s = 34{,}6 \text{ mm}.$$

Anmerkung. Diese Rechnung lässt die einen fallenden Wasserstrahl auseinander zerrende Wirkung der Schwere erkennen; man erklärt damit, weshalb ein von grosser Höhe herabkommender Wasserfall (wie z. B. der berühmte Staubbachfall in der Schweiz) unten in feinen Wasserstaub aufgelöst ankommt. — Hierzu erwähne ich noch, dass mich Herr Dr. P. Meutzner in Annaberg freundlichst darauf aufmerksam machte, dass es nach dem Wortlaute der Aufgabe eigentlich richtiger erscheinen würde, $s' = 300$ m zu setzen, als $s = 300$ m. Praktisch bleibt sich dies natürlich gleichgültig und ich habe desshalb an der Rechnung nichts geändert; dagegen empfehle ich, die Rechnung zur Uebung so zu wiederholen, dass Δs in s' anstatt in s ausgedrückt wird. Man findet dann

$$\Delta s = 2\sqrt{es'} - e$$

also ein um 0,002 mm kleineres, d. h. mit Rücksicht auf die vorgenommene Abkürzung dasselbe Resultat.

5. *Aufgabe. Ein materieller Punkt soll sich in einer Ebene bewegen, so dass seine rechtwinkligen Coordinaten zur Zeit t durch die Gleichungen*

$$x = a \cos 2\pi \frac{t}{T}; \qquad y = b \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

gegeben sind; a, b und T sind beliebig gegebene constante Grössen. Was für eine Bahn beschreibt der Punkt und welche Kraft muss in jedem Augenblicke an ihm wirken, damit diese Bewegung erfolgt?

Lösung. Die erste Frage ist rein geometrisch; wir beantworten sie, indem wir die Variable t aus den beiden Gleichungen eliminiren, so dass eine Gleichung zwischen den Coordinaten x und y übrig bleibt. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 2\pi \frac{t}{T}.$$

Behandelt man die zweite ebenso und addirt hierauf beide zu einander, so erhält man

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Die Curve ist also eine Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Ursprunge und deren Axen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen.

Für die X-Componente der an dem Punkte angreifenden Kraft hat man nach dem dynamischen Grundgesetze

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\, ma\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos 2\pi\frac{t}{T}$$

und ebenso erhält man für die Y-Componente

$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2} = -\, mb\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\,.$$

Der Vergleich mit den Gleichungen für die Coordinaten des Punktes zeigt, dass

$$\frac{X}{Y} = \frac{x}{y}$$

ist. Die Resultirende aus X und Y fällt daher in die Richtung der Resultirenden von x und y, d. h. sie geht in jedem Augenblicke durch den Coordinatenursprung. Die Vorzeichen von X und Y geben uns an, dass der Pfeil der Resultirenden stets dem Ursprunge zugekehrt ist. Die an dem Punkte angreifende Kraft ist hiermit als eine Centralkraft erkannt, d. h. als eine Kraft, die stets nach einem festen Anziehungscentrum, als das hier der Ursprung dient, hin gerichtet ist. Da die Componenten X und Y den Coordinaten x und y direct proportional sind, folgt ferner, dass auch die resultirende Kraft in jedem Augenblicke dem Abstande vom Anziehungscentrum proportional ist. Eine Kraft dieser Art tritt auf, wenn der materielle Punkt durch elastische Verbindungen an den Coordinatenursprung gefesselt ist. Die durch die Gleichungen dargestellte Bewegung bildet einen einfachen Fall einer elastischen Schwingung; sie wird auch als eine harmonische Bewegung des materiellen Punktes bezeichnet.

6. *Aufgabe.* *Wie gross ist die Centrifugalkraft für einen materiellen Punkt, dem wir ein Gewicht von 5 g zuschreiben, und der sich in 3* mm *Abstand von der Drehaxe befindet, wenn die Winkelgeschwindigkeit 3000 Touren in der Minute beträgt?*

Lösung. In solchen Fällen ist es am bequemsten, den Ausdruck für die Centrifugalkraft

$$C = \frac{Q}{g}\frac{v^2}{r}$$

zunächst durch Einführung der Winkelgeschwindigkeit mit Hülfe der Beziehung $v = ur$ umzuformen in

$$C = \frac{Q}{g} u^2 r.$$

Für u erhalten wir, wenn wir die Winkel in Bogenmaass ausdrücken und die Secunde als Zeiteinheit wählen,

$$u = \frac{3000 \cdot 2\pi}{60 \text{ sec}} = 100\,\pi \text{ sec}^{-1}$$

und hiermit

$$C = \frac{0{,}005 \text{ kg}}{9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}} \cdot 10000\,\pi^2 \text{ sec}^{-2} \cdot 0{,}003 \text{ m} = 0{,}15 \text{ kg}.$$

Das Quadrat von π ist 9,870, also fast genau so gross als die auf m und sec bezogene Beschleunigung der Schwere 9,81. Bei überschlägigen Rechnungen pflegt man daher der Bequemlichkeit wegen, wie es auch hier geschehen ist, π^2 gegen g zu streichen. Natürlich ist dies aber nur zulässig, so lange man g auf die genannten Einheiten bezieht und keine grössere Genauigkeit als etwa 1 vom Hundert verlangt.

7. *Aufgabe. Wie gross ist der Winkel, den die beiden 30 cm langen Pendel eines Centrifugalregulators mit einander bilden, wenn kein Gegengewicht angebracht ist und die Welle 120 Umdrehungen in der Minute macht?*

Lösung. Man bringe an der Kugel, die sich am Ende des Pendels befindet und deren Masse als gross gegenüber der Masse der Stange betrachtet wird, die fingirte Centrifugalkraft C an. Dann müssen sich alle Kräfte an der Kugel im Gleichgewichte halten. Im Ganzen sind dies drei Kräfte, ausser C nämlich noch das Kugelgewicht Q und die vom Gelenke her durch die Stange übertragene Zwangskraft. Wir wenden den Momentensatz für den Gelenkmittelpunkt an. Dann fällt das Moment der Zwangskraft, die durch den Momentenpunkt geht, fort und die Gleichgewichtsbedingung erfordert, dass das Moment von Q ebenso gross und entgegengesetzt gerichtet ist, wie das Moment von C. Die Pendellänge sei l und der Winkel, den das Pendel mit der Lothrechten bildet,

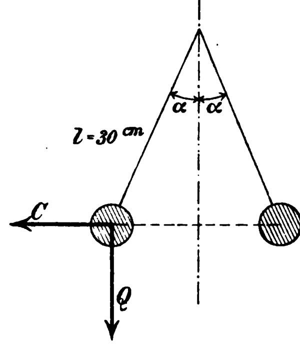


Abb. 18.

sei α. Dann ist der rechtwinklig zu C gezogene Hebelarm gleich $l \cos\alpha$ und der Hebelarm von Q gleich $l \sin\alpha$. Dieser letzte Werth gibt zugleich den Halbmesser des Kreises an, den der materielle Punkt beschreibt. Die Momentengleichung liefert

$$Cl\cos\alpha = Ql\sin\alpha \quad \text{oder} \quad C = Q\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

In diese Gleichung führen wir noch den Werth der Centrifugalkraft

$$C = \frac{Q}{g} u^2 r$$

ein, in der für r der vorher ermittelte Werth $l \sin\alpha$ zu setzen ist. Hierdurch erhalten wir

$$\frac{Q}{g} u^2 l \sin\alpha = Q\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

woraus für den Winkel α die Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{g}{u^2 l}$$

folgt. Wir brauchen jetzt nur noch die Zahlenwerthe $u = 4\pi\ \mathrm{sec}^{-1}$, $g = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$ und $l = 0{,}3$ m einzusetzen, womit

$$\cos\alpha = \frac{9{,}81}{16\,\pi^2 \cdot 0{,}3} = \frac{1}{4{,}8} = 0{,}208$$

gefunden wird, wenn wir wieder π^2 gegen 9,81 streichen. Der Winkel α selbst folgt daraus zu 78^0; der Winkel zwischen beiden Pendeln ist doppelt so gross.

8. *Aufgabe. Von einem Punkte A aus sind beliebig viele schiefe Ebenen gezogen. Auf jeder von ihnen soll gleichzeitig ein materieller Punkt ohne Reibung hinabgleiten; man soll die Curve oder die Fläche angeben, auf der alle Punkte nach Ablauf einer gegebenen Zeit enthalten sind.*

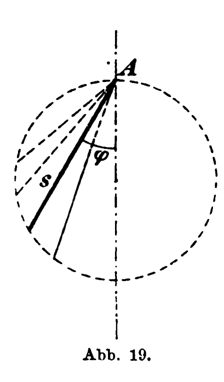


Abb. 19.

Lösung. Die Beschleunigung b auf der schiefen Ebene ist nach § 18 gleich $g \sin\alpha$ oder, wenn man den Winkel, den die schiefe Ebene mit der Lothrichtung bildet, mit φ bezeichnet, gleich $g \cos\varphi$. Der Weg s, der in der Zeit t auf der schiefen Ebene zurückgelegt wird, ist daher

$$s = \frac{bt^2}{2} = \frac{gt^2}{2}\cos\varphi.$$

Hiermit ist s als Function des Winkels φ dargestellt; die Gleichung ist aber die Polargleichung eines Kreises, der durch den Anfangs-

punkt geht, dessen Mittelpunkt lothrecht unter dem Anfangspunkte liegt und dessen Durchmesser gleich $g\frac{t^2}{2}$ ist. Hierbei sind nur solche Stellungen der schiefen Ebene in Betracht gezogen, die senkrecht zur Zeichenebene liegen, in der der gefundene Kreis enthalten ist. Zieht man auch alle anderen möglichen Stellungen in Betracht, so liegen die Endpunkte aller Wege auf einer Kugelfläche, von der jener Kreis ein grösster Kreis ist.

9. *Aufgabe. Von A in Abb. 20 soll eine schiefe Ebene x (senkrecht zur Zeichenebene) so gelegt werden, dass ein auf ihr hinabgleitender materieller Punkt in kürzester Zeit auf die Fläche CD gelangt.*

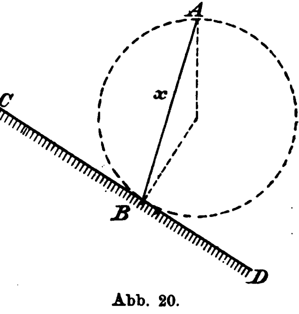


Abb. 20.

Lösung. Man construire einen Kreis, der durch den Punkt A geht, an dieser Stelle eine horizontale Tangente hat und zugleich die Fläche CD (bezw. deren Spur in der Zeichenebene) berührt. Dann liefert die Verbindungslinie von A mit dem Berührungspunkte B des Kreises die Richtung der gesuchten schiefen Ebene. Denn nach dem, was in der vorigen Aufgabe von den Eigenschaften des genannten Kreises bewiesen wurde, wäre der materielle Punkt auf jeder in anderer Richtung gezogenen schiefen Ebene zur gleichen Zeit ebenfalls nur bis zum Kreisumfange, also noch nicht bis zur Fläche CD gelangt.

Zweiter Abschnitt.

Mechanik des starren Körpers.

---

§ 19. Begriff des starren Körpers.

Wenn das Bild des materiellen Punktes zur Darstellung eines Körpers nicht mehr ausreicht, wenn sich also nicht mehr alle Theile des Körpers im Wesentlichen unter den gleichen Bedingungen befinden und gleiche Bahnen bei der Bewegung beschreiben, müssen wir den Körper, wie schon früher auseinandergesetzt wurde, als einen Haufen materieller Punkte auffassen. Je grösser wir die Anzahl der Punkte des Haufens wählen, desto genauer vermögen wir dem Unterschiede zwischen benachbarten Theilen des Körpers Rechnung zu tragen. Es steht nichts im Wege, uns die Anzahl der Punkte sogar unendlich gross zu denken; jedem dieser Punkte entspricht dann nur ein unendlich kleiner Theil der Masse des ganzen Körpers. Gewöhnlich denkt man sich zu diesem Zwecke das Volumen des Körpers auf irgend eine bestimmte Art in unendlich kleine Volumenelemente zerlegt. Den in jedem Volumenelemente enthaltenen Antheil an der Masse des Körpers bezeichnet man als ein Massenelement und fasst dieses als einen materiellen Punkt auf.

Dadurch, dass man dem Punkthaufen, der in dieser Weise gewonnen ist, noch weitere bestimmte Eigenschaften beilegt, vermag man sich dem wirklichen Verhalten der Naturkörper so genau anzuschliessen, als es gewünscht wird, oder als es für den grade ins Auge gefassten Zweck nöthig ist. Man

wird also die Bedingungen, denen man die Punkte des Haufens unterwirft, anders zu wählen haben, je nachdem man gasförmige, tropfbar flüssige oder feste Körper darstellen will. Aber auch die Eigenschaften der sogenannten festen Körper wechseln von Fall zu Fall noch in hohem Maasse; man reicht daher nicht mit einem einzigen Bilde aus, um das physikalische Verhalten der festen Körper vollständig wiederzugeben.

Das Kennzeichen des festen Körpers besteht darin, dass er seine Gestalt unter gewöhnlichen Umständen ziemlich genau beibehält. Bei vielen Untersuchungen sind die geringen Formänderungen, die in Wirklichkeit immer eintreten, wenn man Kräfte auf den Körper einwirken lässt, von so geringem Einflusse auf den Vorgang, den man grade untersuchen will, dass es zulässig ist, ganz von ihnen abzusehen. Es genügt in solchen Fällen, den Körper als einen Punkthaufen von unveränderlicher Gestalt aufzufassen, und man bezeichnet ihn dann als einen starren Körper.

Der starre Körper ist demnach, worauf wohl zu achten ist, nur ein zur Abkürzung und Vereinfachung der Betrachtungen eingeführtes Bild der Mechanik. So wenig wie der materielle Punkt genügt der starre Körper vollständig zur Entscheidung aller Fragen, die sich über das Verhalten eines gegebenen Naturkörpers stellen lassen. Das neue Bild reicht zwar viel weiter, als das frühere, aber es ist noch nicht erschöpfend. Es wäre also ganz irrthümlich, wenn man annehmen wollte, dass mit der Einführung dieses Begriffes in die Mechanik die Behauptung verbunden sei, dass wirklich in der Natur solche Körper vorkämen, die man unter allen Umständen als starr betrachten könnte.

Jedenfalls trifft aber das Bild des starren Körpers für die Untersuchung jener Fälle vollständig und in aller Strenge zu, bei denen von vornherein bekannt ist, dass keine Gestaltänderung eintritt. Dazu gehört namentlich der Fall des Gleichgewichts und speciell der Fall der Ruhe. Zur Ruhe eines Körpers gehört, dass alle Theile in Ruhe seien, dass sich also auch die gegenseitige Lage der Theile nicht ändere. So lange

der Körper in Ruhe ist, verhält er sich also sicher immer wie ein starrer, und die Sätze der Mechanik starrer Körper können mit voller Genauigkeit und Gewissheit auf ihn zur Anwendung gebracht werden. Dazu ist es gar nicht einmal nöthig, dass der Körper im Uebrigen als ein fester zu betrachten sei. Auch eine Wassermasse kann, so lange sie in Ruhe bleibt, als starrer Körper aufgefasst werden. Voraussetzung dafür ist in allen solchen Fällen nur, dass man sich hinreichende Gewissheit dafür verschafft hat, dass thatsächlich keine Gestaltänderung eintritt. Immerhin ist aber die Zahl der Fälle, bei denen man von vornherein genau zu übersehen vermag, dass Gestaltänderungen entweder ganz oder doch nahezu ausgeschlossen sind, bei festen Körpern viel grösser als bei flüssigen. In erster Linie stellt man sich daher unter einem starren Körper stets einen festen vor, der nur die Eigenschaft des Festseins in besonders hohem Grade besitzt oder der, wie man sich zuweilen ausdrückt, als absolut fest angesehen werden kann.

§ 20. Lehre von der Bewegung des starren Körpers.

Von der Bewegung eines einzelnen Punktes kann sich Jedermann aus der alltäglichen Erfahrung eine zutreffende Vorstellung machen, so lange wenigstens, als nur die Bewegung gegen die feste Erde, die gewöhnlich als Aufstellungsort des Beobachters gewählt wird, in Frage kommt. Dagegen bedarf es einer besonderen Anleitung für die einfachste Auffassung der allgemeinsten Bewegung, die ein starrer Körper ausführen kann. Wer damit nicht vertraut gemacht wurde, vermag sich nur eine unklare und verschwommene Vorstellung von einem solchen Bewegungsvorgange zu machen, die nicht dazu geeignet ist, die dabei auftretenden Gesetzmässigkeiten weiter zu erforschen.

Die Aufgabe, um die es sich hier handelt, ist eine rein geometrische, und man hat daher die Lehre von der Bewegung eines starren Körpers oder auch beliebig vieler starrer Körper

gegeneinander als die Geometrie der Bewegung oder mit dem gleichbedeutenden griechischen Worte als die Kinematik der starren Körper bezeichnet. Oft wird die Kinematik als ein besonderer Wissenszweig, der nur in lockerem Zusammenhange mit der eigentlichen Mechanik steht, für sich behandelt. Gerechtfertigt wird dies durch den Umstand, dass schon die blos geometrische Untersuchung der Bewegung ohne Rücksicht auf die Kräfte, die dabei ins Spiel kommen, eine Reihe merkwürdiger Beziehungen aufzudecken vermag. Auch an der Münchener Hochschule ist der Kinematik eine besondere Vorlesung gewidmet und ich begnüge mich aus diesem Grunde damit, hier nur die einfachsten und für das Verständniss der übrigen Lehren der Mechanik unentbehrlichsten Sätze über die Kinematik des starren Körpers abzuleiten.

Als allgemein bekannt dürfen die beiden einfachsten Bewegungsarten eines starren Körpers angesehen werden, nämlich die Translation oder Verschiebung im engeren Sinne, auch Parallelverschiebung genannt, und die Rotation oder Drehung. Bei der Translation beschreiben alle Punkte des Körpers congruente Bahnen. In jede spätere Lage kann man sich den Körper aus der Anfangslage auch dadurch übergeführt denken, dass man jeden Punkt in grader Linie um gleich viel und in derselben Richtung verschiebt. Die Verbindungslinie von zwei materiellen Punkten bleibt daher bei jeder neuen Lage des Körpers parallel zu der Richtung, die sie in der Anfangslage hatte, woher die Bezeichnung der Translation als Parallelverschiebung kommt. Zur Kennzeichnung der neuen Lage des Körpers genügt daher, falls man weiss, dass die Bewegung nur in einer Translation bestand, die Angabe einer einzigen gerichteten Strecke die von der Anfangslage irgend eines Punktes zu dessen Endlage gezogen ist. Gewöhnlich genügt es dann auch, den Körper überhaupt nur unter dem Bilde eines einzigen materiellen Punktes darzustellen, wie bei den Untersuchungen des vorigen Abschnitts. Uebrigens möchte ich noch ausdrücklich darauf aufmerksam machen, dass bei der Translation alle Punkte des Körpers auch Kreise beschreiben

können; diese müssen aber dann alle gleich gross sein. Die kreisförmige Bewegung an sich ist also keineswegs, wie es bei flüchtiger Betrachtung scheinen könnte, auf die Rotation beschränkt.

Zum Begriffe der Rotation gelangt man dadurch, dass man sich vorstellt, irgend zwei Punkte des starren Körpers seien während der Bewegung festgehalten. Dann müssen wegen der unveränderlichen Gestalt des Punkthaufens auch alle anderen Punkte, die auf der durch jene beiden gelegten Graden enthalten sind, an ihrem Orte bleiben. Diese Grade heisst die Rotationsaxe. Denkt man sich von irgend einem ausser ihr liegenden Punkte des Körpers eine Senkrechte zur Rotationsaxe gezogen, so muss diese, wiederum wegen der Unveränderlichkeit der Körpergestalt, auch in jeder neuen Lage senkrecht zur Rotationsaxe bleiben und ihre Länge kann sich nicht ändern. Die Senkrechte bildet also den Halbmesser eines Kreises, auf dem sich der zugehörige Punkt bewegt. Dem Absolutbetrage nach haben alle Punkte, die in gleichem Abstande von der Drehaxe liegen, in jedem Augenblicke gleiche Geschwindigkeiten. Bei Punkten, die in verschiedenen Abständen liegen, drehen sich die zur Rotationsaxe gezogenen Senkrechten stets um gleiche Centriwinkel; die Absolutbeträge der Geschwindigkeiten verhalten sich also wie die Abstände von der Drehaxe.

Zur Kennzeichnung jeder neuen Lage, die ein rotirender Körper einnehmen kann, genügt die Angabe der Drehaxe und der Grösse des Winkels, den irgend ein nach den vorhergehenden Vorschriften gezogener Halbmesser von der Anfangslage aus zurückgelegt hat. Nach einer vollen Umdrehung kehrt der Körper wieder in die Anfangslage zurück; wenn es sich nur um die Kennzeichnung der augenblicklichen Lage handelt, kann man daher den Winkel 2π beliebig oft von dem wirklich zurückgelegten Drehungswinkel subtrahiren oder ihn dazu addiren. Der Winkel, der die augenblickliche Lage beschreibt, sei φ und nach einem Zeittheilchen dt gleich $\varphi + d\varphi$; dann stellt das Verhältniss

$$u = \frac{d\varphi}{dt} \tag{55}$$

die auf die Zeiteinheit bezogene Zunahme des Drehungswinkels im gegebenen Augenblicke oder die Winkelgeschwindigkeit dar. Von diesem naheliegenden Begriffe ist schon im vorigen Abschnitte gelegentlich Gebrauch gemacht worden. Hieran knüpft sich sofort der Begriff der Winkelbeschleunigung w, der aus der Winkelgeschwindigkeit ebenso abgeleitet wird, wie die Beschleunigung aus der Geschwindigkeit bei der gradlinigen Bewegung. Wir verstehen also darunter das Verhältniss zwischen der Zunahme der Winkelgeschwindigkeit und dem Zeittheilchen, das während dessen verstreicht, oder mit anderen Worten die auf die Zeiteinheit bezogene augenblickliche Winkelgeschwindigkeitszunahme und setzen

$$w = \frac{du}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{56}$$

Zwischen dem Winkelwege, der Winkelgeschwindigkeit, der Winkelbeschleunigung und der Zeit gelten für die gleichförmig beschleunigte oder gleichförmig verzögerte Rotation um eine feste Axe genau die in den Gleichungen (13) zusammengestellten Formeln für die gradlinige gleichförmig veränderte Bewegung, sobald man die dort gebrauchten Bezeichnungen in dem jetzt in Frage kommenden Sinne deutet. Denn alle Betrachtungen, die zur Ableitung jener Formeln führten, lassen sich genau in derselben Weise auch für die rotirende Bewegung wiederholen.

Mit der Erörterung der einfachen Translation und der einfachen Rotation ist aber die Untersuchung noch nicht abgethan. — Wir wollen jetzt eine beliebige ebene Bewegung des starren Körpers ins Auge fassen. Darunter ist eine Bewegung zu verstehen, bei der jeder Punkt des Körpers eine Bahn beschreibt, die einer gegebenen Ebene parallel ist oder bei der er stets den gleichen Abstand von der gegebenen Ebene behält. Legt man irgend einen Schnitt durch den Körper parallel zu jener Ebene, so bewegt sich der Querschnitt nur innerhalb seiner eigenen Ebene, und man kennt die Bewegung

des ganzen Körpers, sobald man die Bewegung irgend eines solchen Querschnitts in der eigenen Ebene anzugeben vermag.

Der Querschnitt bleibt während der Bewegung in seiner eigenen Ebene nach dem Begriffe des starren Körpers sich selbst congruent. Man kann daher jede neue Lage dadurch kennzeichnen, dass man angibt, wohin irgend zwei beliebig ausgewählte Punkte A und B gelangt sind. Denn will man nachher wissen, wohin irgend ein dritter Punkt C gekommen ist, so braucht man nur über der Grundlinie AB in der neuen Lage ein Dreieck ABC zu construiren, dass dem in der Anfangslage congruent ist. Allerdings sind über der gegebenen Grundlinie AB zwei solche, zu verschiedenen Seiten und symmetrisch zu einander liegende Dreiecke ABC möglich. Davon kann aber nur jenes in Betracht kommen, das sich mit dem Dreiecke in der Anfangslage durch blosse Verschiebung in der eigenen Ebene zur Deckung bringen lässt. Um die Deckung mit dem andern herbeizuführen, müsste man es zuvor aus der Ebene herausheben und es umwenden, was bei der ebenen Bewegung natürlich nicht in Frage kommen kann. In der That ist also durch diese Construction die neue Lage jedes anderen Punktes eindeutig bestimmt, sobald man die Lage von irgend zwei Punkten kennt.

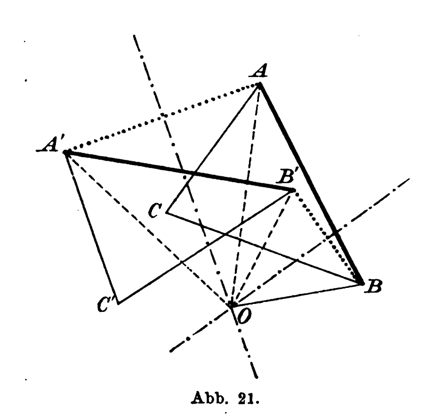


Abb. 21.

Man kann nun leicht zeigen, dass die ebene Figur, die den Querschnitt bildet, aus der Anfangslage in jede spätere Lage auch durch eine einfache Drehung um einen gewissen Punkt übergeführt werden kann. Zu diesem Zwecke fasse man Abb. 21 ins Auge, bei der ABC irgend drei Punkte in der Anfangslage, $A'B'C'$ dieselben materiellen Punkte in der Endlage bedeuten. Von der ganzen Figur sind der Einfachheit wegen

nur drei Punkte gezeichnet; A und B sind jene, durch die man wie vorher die neue Lage der Figur vollständig zu beschreiben vermag, und C ist irgend ein dritter Punkt, der nur als Beispiel aus allen anderen ausgewählt wurde. Man ziehe zu den Verbindungsstrecken AA' und BB' die Mittelsenkrechten und ermittle deren Schnittpunkt O. Dann kann die Strecke AB in die neue Lage $A'B'$ durch eine Drehung um den Punkt O übergeführt werden. Um dies zu beweisen, ziehe man die Verbindungslinien OA, OA', OB, OB'. Man findet, dass die Dreiecke OAB und $OA'B'$ congruent sind, weil sie in drei Seiten übereinstimmen, daher ist

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'.$$

Subtrahirt man davon beiderseits den Winkel AOB', so ist auch

$$\sphericalangle BOB' = \sphericalangle AOA'.$$

Sobald man aber AB um den Punkt O um diesen Winkel dreht, gelangt B nach B' und A nach A'; die beiden Strecken decken sich also. Daraus folgt sofort, dass auch C mit C' zusammenfällt, nachdem die Drehung ausgeführt ist, denn die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind nach Voraussetzung congruent.

Wenn $A'B'$ parallel zu AB ist, fällt der Drehpunkt O ins Unendliche. Eine Translation kann daher als eine Drehung um einen unendlich fernen Punkt aufgefasst werden.

Die Bewegung von AB in die neue Lage $A'B'$ braucht in Wirklichkeit natürlich nicht in der Drehung um den Punkt O bestanden zu haben; sie kann auch auf irgend einem anderen Wege vor sich gegangen sein. Denkt man sich aber bei irgend einer beliebigen ebenen Bewegung eine sehr grosse Zahl unmittelbar aufeinander folgender Lagen ausgewählt, so kann man die Figur aus jeder Lage in die folgende durch Drehung um einen zugehörigen Punkt O überführen. Bei jeder folgenden Bewegung wechselt im Allgemeinen O seine Lage. Wenn man die aufeinander folgenden Lagen hinreichend nahe bei einander und die Anzahl der Drehpunkte demnach gross genug wählt, kann man sich der wirklichen Bewegung so genau, als es nur irgend verlangt wird, anschliessen. Um

die wahre Bewegung ganz genau nachzuahmen, wird man freilich die Lagen unendlich nahe benachbart und die Zahl der nacheinander auftretenden Drehpunkte O unendlich gross zu wählen haben.

Jener Punkt O, um den man sich die Figur in einem gegebenen Augenblicke gedreht denken muss, um sie in eine unendlich benachbarte Lage überzuführen, wird der augenblickliche Drehpunkt oder das Momentancentrum oder auch der Pol der Bewegung genannt. Man denke sich für eine beliebige ebene Bewegung zu jeder Lage den augenblicklichen Drehpunkt angegeben. Alle diese Drehpunkte in der festen Ebene kann man sich durch eine Curve verbunden denken, die eine Polcurve genannt wird. Ausserdem kann man aber auch in der beweglichen Figur alle Punkte, die der Reihe nach mit dem augenblicklichen Drehpunkte zusammenfallen, durch eine Linie miteinander verbinden. Dadurch erhält man eine zweite Polcurve und die Bewegung der Figur in der Ebene kann nun als ein Rollen der mit der Figur verbundenen Polcurve auf der Polcurve in der festen Ebene beschrieben werden. Von dieser Construction macht man in vielen Fällen Gebrauch, um zu einer klaren Uebersicht über die Art der Bewegung zu gelangen.

Eng verwandt mit der ebenen Bewegung ist die sonst beliebige Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt; man kann diese als eine Bewegung im Strahlenbündel bezeichnen. Zunächst lässt sich zeigen, dass der Körper bei dieser Bewegung aus einer Anfangslage in irgend eine neue Lage auch durch Drehung um eine durch den festen Punkt gehende Axe übergeführt werden kann. Man denke sich ähnlich wie vorher einen ebenen Querschnitt so jetzt einen kugelförmigen Schnitt durch den Körper gelegt, dessen Mittelpunkt mit dem festen Punkte zusammenfällt. Alle materiellen Punkte des Körpers, die anfänglich auf dieser Kugelfläche lagen, müssen auch weiterhin auf ihr bleiben; der durch den Körper gelegte kugelförmige Schnitt kann sich daher nur innerhalb der eigenen Kugelfläche verschieben. Wenn die

sphärische Bewegung einer mit dem Körper fest verbundenen sphärischen Figur bekannt ist, kennt man damit auch die Bewegung des ganzen Körpers, denn von jener Figur aus kann der seiner Gestalt nach unveränderliche Körper jederzeit wieder construirt werden. Genau dieselben Schlüsse wie bei der ebenen Bewegung zeigen uns auch, dass es zur Kennzeichnung irgend einer neuen Lage der sphärischen Figur schon genügt, wenn man zwei Punkte davon angibt. Hier tritt nur die Beschränkung hinzu, dass die beiden Punkte nicht die Endpunkte desselben Durchmessers bilden dürfen.

In Abb. 22 sei AB die Anfangslage, $A'B'$ die Endlage eines zu einem grössten Kreise gehörenden Bogens, der als Basis angesehen werden soll, von der aus die ganze sphärische

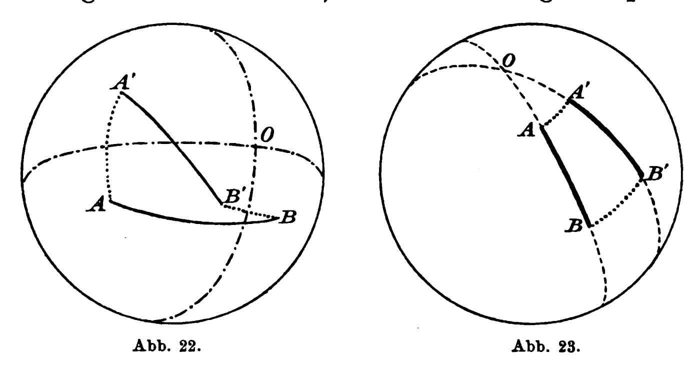


Abb. 22. Abb. 23.

Figur auf Verlangen jederzeit construirt werden kann. Man lege durch den Kugelmittelpunkt zwei Ebenen, von denen die eine die Verbindungslinie AA', die andere BB' senkrecht halbirt. In der Abbildung sind die Ebenen durch die grössten Kreise angegeben, nach denen sie die Kugelfläche schneiden. Der Schnittpunkt O beider Kreise oder auch der ihm diametral gegenüberliegende zweite Schnittpunkt können als die Drehpunkte für die sphärische Bewegung aus der Lage AB in die Lage $A'B'$ angesehen werden. Der zugehörige Durchmesser ist die gesuchte Drehaxe, um die man den Körper aus der Anfangslage in die beliebig gegebene Endlage drehen kann.

Ausnahmsweise kann es zwar, wie in Abb. 23 angedeutet,

auch vorkommen, dass die mittelsenkrechten Ebenen von AA' und BB' zusammenfallen. Dann braucht man aber nur die Bögen AB und $A'B'$ zu verlängern, um den Pol O und die dazu gehörige Drehaxe zu finden.

Auch alle ferneren Schlüsse, zu denen wir bei der Untersuchung der ebenen Bewegung geführt wurden, lassen sich auf den vorliegenden Fall, der deshalb auch seither schon kürzer erledigt werden konnte, unmittelbar übertragen. Namentlich lässt sich jede beliebig vorgeschriebene Bewegung um den festen Punkt dadurch zu Stande bringen, dass man nacheinander eine Reihe unendlich kleiner Drehungen um verschiedene Drehaxen ausführt. Die augenblickliche Drehaxe heisst auch Momentanaxe. Die Aufeinanderfolge aller Momentanaxen im festen Raume einerseits und aller mit dem bewegten Körper verbundenen Graden andererseits, die der Reihe nach mit der Momentanaxe zusammenfallen, liefert zwei Kegel oder im Schnitte mit der Kugelfläche zwei sphärische Curven. Jede beliebige Bewegung um den festen Punkt kann als ein Rollen der zugehörigen Axenkegel oder der ihnen entsprechenden sphärischen Curven aufeinander aufgefasst werden.

Hiernach ist die augenblickliche Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt vollständig gegeben, wenn man erstens die Lage der augenblicklichen Drehaxe und zweitens die Winkelgeschwindigkeit der Grösse und dem Sinne nach (ob rechts- oder linksherum) kennt. Dazu braucht man eine Richtung und eine mit Vorzeichen versehene numerische Angabe. Beide können aber auch mit einander verbunden werden, indem man eine Strecke auf der Drehaxe abträgt, die unter Zugrundelegung eines bestimmten Maassstabs die Grösse der Winkelgeschwindigkeit angibt. Auch der Sinn, in dem die Drehung erfolgt, oder das Vorzeichen der Winkelgeschwindigkeit lässt sich hierbei zum Ausdrucke bringen. Wir wollen festsetzen, dass die Winkelgeschwindigkeit auf der Drehaxe vom festen Punkte aus nach jener Seite hin abgetragen werden soll, von der aus gesehen die Bewegung mit dem Sinne der Uhrzeigerbewegung übereinstimmt. Natürlich ist diese Ver-

einbarung ganz willkürlich; sie könnte ebenso gut durch die entgegengesetzte ersetzt werden.

Hiermit ist die Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Bewegung als eine gerichtete Grösse definirt. Um dies hervorzuheben, benutze ich zu ihrer Bezeichnung im Folgenden den Buchstaben $\mathfrak{u}$, während u nach wie vor den absoluten Betrag von $\mathfrak{u}$ bedeutet.

Wir wollen jetzt die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines beliebigen Punktes des Körpers nach Grösse und Richtung berechnen, wenn $\mathfrak{u}$ und die Lage des Punktes gegeben sind. In Abb. 24 sei O der feste Punkt, $\mathfrak{u}$ gebe die Richtung der Momentanaxe und zugleich Grösse und Sinn der Winkelgeschwindigkeit an und A sei ein beliebig ausgewählter Punkt des Körpers. Um die Lage von A festzulegen, ziehe ich von A nach O einen Radiusvector $\mathfrak{r}$, der in diesem Sinne gezählt werden soll. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ steht zunächst senkrecht zu der durch A und die Drehaxe gelegten Ebene. Der Pfeil von $\mathfrak{v}$ ist in die axonometrische Figur so eingetragen, wie es den vorher getroffenen Festsetzungen über die Bedeutung des Pfeiles von $\mathfrak{u}$ entspricht.

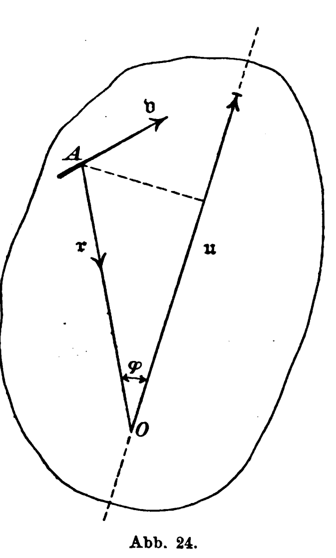


Abb. 24.

Die Grösse v von $\mathfrak{v}$ folgt aus dem Begriffe der Winkelgeschwindigkeit zu

$$v = ur \sin \varphi,$$

wobei $r \sin \varphi$ die Länge der von A auf $\mathfrak{u}$ gefällten Senkrechten angibt. Der Werth von v stimmt aber mit der Grösse des äusseren Products von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{r}$ überein. Ausserdem fällt auch die Richtung dieses äusseren Products nach dem, was früher darüber ausgemacht wurde, mit der Richtung von $\mathfrak{v}$ zusammen. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist daher für jeden Punkt des Körpers

im gegebenen Augenblicke nach Grösse und Richtung gleich dem äusseren Producte aus $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{r}$ oder

$$\mathfrak{v} = V \mathfrak{u} \mathfrak{r} . \tag{57}$$

Das äussere Product war das Symbol für das statische Moment. Wir können daher Gl. (57) auch dahin aussprechen, dass die Geschwindigkeit jedes Punktes gleich dem statischen Momente der im festen Punkte abgetragenen Winkelgeschwindigkeit für jenen Punkt als Momentenpunkt ist.

In manchen Fällen ist es bequemer, die Radienvectoren nicht von A nach O, sondern im umgekehrten Sinne zu zählen, so dass der feste Punkt der gemeinsame Anfangspunkt aller Radienvectoren ist. Bezeichnet man einen in diesem Sinne gerechneten Radiusvector mit $\mathfrak{r}'$, so ist $\mathfrak{r}' = -\mathfrak{r}$ und Gl. (57) geht über in

$$\mathfrak{v} = -V \mathfrak{u} \mathfrak{r}' = V \mathfrak{r}' \mathfrak{u} . \tag{58}$$

Bei er letzten Umformung ist davon Gebrauch gemacht, dass sich die Richtung eines äusseren Products bei der Vertauschung der Factoren umkehrt.

Nach diesen Vorbereitungen können wir auch zur Behandlung der allgemeinsten Bewegung übergehen, die ein starrer Körper auszuführen vermag. Man greife irgend einen Punkt O in der Anfangslage heraus. In seine Endlage kann der starre Körper dann jedenfalls auch dadurch übergeführt werden, dass man ihm erst eine Translation ertheilt, durch die der Punkt O in seine neue Lage gebracht wird, worauf man ihn noch einer Rotation um den Punkt O in der neuen Lage unterwirft. Die Reihenfolge dieser beiden nacheinander erfolgenden Bewegungen kann ohne Aenderung des Resultats vertauscht werden und man kann sich daher auch vorstellen, dass beide gleichzeitig ausgeführt werden. Da die Auswahl des Punktes O beliebig ist, kann man demnach die wirkliche Lagenänderung auf unendlich viele Arten in eine Translation und eine Rotation zerlegen.

Damit die Bewegung mit der wirklich ausgeführten auch in den Zwischenlagen genau übereinstimme, wird man, wie in

den vorhergehenden Fällen, die beschriebene Zerlegung für jeden Uebergang in eine unendlich benachbarte Lage von Neuem zu wiederholen haben. Wir wollen daher unser Augenmerk weiterhin auf eine unendlich kleine Lagenänderung richten. Die Geschwindigkeit von O sei im gegebenen Augenblicke $\mathfrak{v}_0$; der Weg von O ist dann während des Zeitelementes dt gleich $\mathfrak{v}_0 dt$. Ausser diesem Wege, den bei der Translation alle Punkte in gleicher Grösse und Richtung mitmachen, kommt für die übrigen Punkte noch der durch die Rotation bedingte Weg hinzu. Dieser wird aus Gl. (57), die für die Rotation um O gilt, durch Multiplication mit dt gefunden. Der wirklich während dt zurückgelegte Weg irgend eines Punktes A ist gleich der geometrischen Summe aus beiden in dieser Weise festgestellten Einzelbewegungen. Daraus erhält man aber nachträglich die Geschwindigkeit des Punktes A im gegebenen Augenblicke nach Grösse und Richtung, wenn man den Factor dt wieder streicht. Für den allgemeinsten Bewegungszustand eines starren Körpers gilt hiernach die Beziehung

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r} = \mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{r}'\mathfrak{u}, \tag{59}$$

wobei wieder $\mathfrak{r}$ der von A nach O und $\mathfrak{r}'$ der in umgekehrter Richtung gezogene Radiusvector ist.

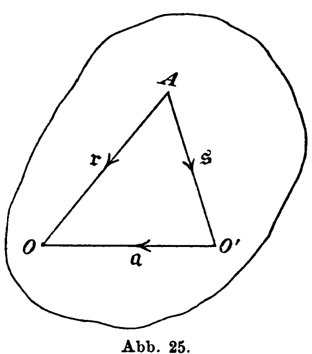


Abb. 25.

Die Wahl des Punktes O, von dem wir bei der Beschreibung der Bewegung ausgingen, war ganz willkürlich. Man wird sich jetzt zu fragen haben, welche Aenderung dadurch herbeigeführt wird, dass man für O einen anderen Punkt O' nimmt. Der von O' nach O gezogene Radiusvector (vgl. Abb. 25) sei $\mathfrak{a}$, und der von A nach O' gezogene sei $\mathfrak{s}$. Dann ist nach dem Begriffe der geometrischen Summe

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{r} - \mathfrak{a}.$$

Ferner möge die Geschwindigkeit des Punktes O' mit $\mathfrak{v}_0'$ be-

zeichnet werden. Dann hat man durch Anwendung von Gl. (59) auf die beiden Punkte A und O' die Gleichungen

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r}$$
$$\mathfrak{v}_0' = \mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{a}.$$

Durch Subtraction beider Gleichungen von einander und Beachtung der vorher für $\mathfrak{s}$ aufgestellten Gleichung erhält man

$$\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0' = V\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{a}) = V\mathfrak{u}\mathfrak{s},$$

also auch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0' + V\mathfrak{u}\mathfrak{s}.$$

Die letzte Gleichung stimmt formal vollständig mit Gl. (59) überein, sobald wir diese auf O' als Anfangspunkt beziehen. Das war natürlich nicht anders zu erwarten. Dagegen finden wir hiermit zugleich, dass sich $\mathfrak{u}$ nicht ändert, wenn wir einen anderen Anfangspunkt wählen. Wie wir also auch die gegebene Lagenänderung in eine Translation und eine Rotation zerlegen, die zugehörige Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ wird davon nicht beeinflusst, während die Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ von der Lage des Bezugspunktes O abhängig ist.

Man wird sich ferner fragen, wie man den Bezugspunkt O wählen muss, um die Beschreibung der Bewegung zu einer möglichst einfachen zu machen. Wir wissen schon, dass $\mathfrak{u}$ davon nicht berührt wird; dagegen können wir durch passende Wahl von O der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ einen einfacheren Werth ertheilen. Aus der schon vorher gebrauchten Gleichung

$$\mathfrak{v}_0' = \mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{a}$$

folgt, dass sich $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{v}_0'$ um ein Glied unterscheiden, das senkrecht zu $\mathfrak{u}$ und zu $\mathfrak{a}$ steht. Nun können wir $\mathfrak{a}$ nach Grösse und Richtung beliebig wählen; jedenfalls bleibt aber der Unterschied zwischen $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{v}_0'$ senkrecht zu der ein für alle Male feststehenden Richtung von $\mathfrak{u}$. Daraus geht hervor, dass $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{v}_0'$ jedenfalls gleiche Projectionen auf die Richtung von $\mathfrak{u}$ haben. Zerlegen wir also die Geschwindigkeiten aller Punkte des Körpers in eine Componente parallel zu $\mathfrak{u}$ und in

eine dazu senkrecht stehende, so ist die erste Componente für alle Punkte gleich, während der zweiten durch passende Wahl von $\mathfrak{u}$ jede beliebige Grösse und jede in einer zu $\mathfrak{u}$ senkrechten Ebene enthaltene Richtung gegeben werden kann.

Es kann sich zufälliger Weise so treffen, dass schon $\mathfrak{v}_0$ senkrecht zu $\mathfrak{u}$ stand, also keine Componente in der Richtung von $\mathfrak{u}$ hatte. Dann sind auch alle anderen Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ senkrecht zu $\mathfrak{u}$, also parallel zu einer Ebene, die zu $\mathfrak{u}$ senkrecht gezogen ist. Die Bewegung ist dann im Augenblicke eine ebene und wir wissen aus den für diese durchgeführten Betrachtungen, dass sie als eine einfache Rotation um eine bestimmte Momentanaxe aufgefasst werden kann.

Im anderen Falle führt eine andere Zerlegung als die bisher gebrauchte zur einfachsten Beschreibung der Bewegung. Jeder Punkt hat nämlich, wie wir sahen, dieselbe Geschwindigkeitscomponente in der Richtung von $\mathfrak{u}$. Sondern wir diese ab, so bleibt nur noch eine Componente parallel zu einer Ebene, die senkrecht zu $\mathfrak{u}$ gezogen ist. Wir können also die Bewegung zerlegen in eine ebene Bewegung, die auch als Rotation um eine bestimmte Momentanaxe aufgefasst werden kann und in eine Translation parallel zu dieser Momentanaxe. Mit der früheren Beschreibung fällt die jetzt gefundene zusammen, wenn wir den Bezugspunkt O auf die Momentanaxe legen.

Das Zusammenwirken einer Rotation um eine Axe und einer Translation parallel zu dieser Axe wird aber als eine Schraubenbewegung bezeichnet. *Jede beliebige unendlich kleine Lagenänderung eines starren Körpers kann daher als eine Elementarschraubenbewegung oder kürzer als eine Schraubung aufgefasst werden.* Die einfache Rotation und die einfache Translation sind in diesem allgemeinsten Falle als Specialfälle mit enthalten; sie gehen daraus hervor, indem man die andere der beiden Bewegungscomponenten gleich Null setzt.

Auch die Lage der Schraubenaxe im gegebenen Augenblicke kann aus den früheren Beziehungen berechnet werden. Man suche dazu einen Punkt auf, dessen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$

parallel mit $\mathfrak{u}$ ist. Für ihn muss das äussere Product aus $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ gleich Null sein. Der von dem gesuchten Punkte nach dem anfänglich gewählten Bezugspunkte O gezogene Radiusvector $\mathfrak{r}$ muss daher nach Gl. (59) die Bedingung

$$0 = V\mathfrak{u}\mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{u}V\mathfrak{u}\mathfrak{r}$$

erfüllen. Der einfacheren Ausrechnung wegen wollen wir speciell jenen Punkt der Schraubenaxe aufsuchen, der mit O in einer zu $\mathfrak{u}$ senkrechten Ebene liegt. Dann steht das gesuchte $\mathfrak{r}$ senkrecht zu $\mathfrak{u}$; das äussere Product $V\mathfrak{u}\mathfrak{r}$ hat daher die Grösse ur und steht senkrecht zu der durch $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{r}$ gelegten Ebene. Multipliciren wir damit nochmals auf äussere Art die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$, wie es in der Gleichung vorgeschrieben ist, so erhalten wir einen Vector von der Grösse $u^2 r$, der nun in die mit $\mathfrak{r}$ entgegengesetzte Richtung fällt, wie aus Abb. 24 leicht entnommen werden kann, wenn man sich in dieser $\mathfrak{r}$ senkrecht zu $\mathfrak{u}$ gezogen vorstellt. Die Auflösung der vorhergehenden Gleichung liefert daher

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{u^2} V\mathfrak{u}\mathfrak{v}_0$$

und damit ist, wenn $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}_0$ gegeben waren, die Lage des gesuchten Punktes bekannt. Die durch diesen Punkt parallel zu $\mathfrak{u}$ gezogene Grade ist die Schraubenaxe.

Diese Betrachtungen lassen sich noch nach manchen anderen Richtungen hin ergänzen und erweitern. Ich strebe aber hier, wie ich schon von vornherein bemerkte, keine erschöpfende Darstellung an und begnüge mich daher, nur noch einige einfache Bemerkungen dazu zu fügen.

Zunächst mache ich darauf aufmerksam, dass der augenblickliche Bewegungszustand eines starren Körpers vollständig durch die Angabe von zwei gerichteten Grössen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}_0$, bezogen auf einen willkürlichen Bezugspunkt, beschrieben werden kann. Die Kennzeichnung einer gerichteten Grösse erfordert aber drei Zahlenangaben; im Ganzen haben wir also 6 numerische Werthe zur Beschreibung des Bewegungszustandes nöthig. Sobald nur einer von diesen Werthen geändert wird,

ändert sich damit die ganze augenblickliche Bewegung. Jede der 6 Zustandszahlen kann selbst unendlich viele Werthe annehmen; man drückt daher die Anzahl der verschiedenen möglichen Bewegungsarten in leicht verständlicher Weise dahin aus, dass man sie gleich ∞^6 setzt. Sind alle 6 Werthe zufällig gleich Null, so heisst dies, dass sich der Körper im Augenblicke gar nicht bewegt oder dass er ruht. Um den Zustand der Ruhe zu beschreiben, werden also auch 6 Bedingungen zu erfüllen sein. Man erhält hiernach eine deutliche Vorstellung der verschiedenen Bewegungsmöglichkeiten auch durch die Aussage, dass ein starrer Körper 6 Freiheitsgrade hat. Was damit gemeint ist, geht aus den vorausgehenden Erörterungen hervor, die mit dieser Aussage nur in anschaulicher Sprache zusammengefasst werden sollen.

Ein Körper, der sich um ein Kugelgelenk in einem festen Gestelle bewegen kann, hat hiernach nur drei Freiheitsgrade, denn für den Kugelmittelpunkt muss $\mathfrak{v}_0 = 0$ sein. Ein Körper, der sich nur um eine feste Axe zu drehen vermag, hat nur einen Freiheitsgrad. Man stelle sich vor, dass man irgend einen als starr zu betrachtenden Körper in die Hand nimmt. Wenn es möglich sein soll, ihn in jede beliebige benachbarte Lage ohne Bewegung des Rumpfes überzuführen, muss die Hand gegen den Rumpf unseres Körpers 6 Freiheitsgrade besitzen. Dies ist in der That durch die Aufeinanderfolge der verschiedenen Gelenke erreicht. Bei manchen Thieren sind die unserem Arme entsprechenden Glieder in Theile zerlegt, die sich gegeneinander zwanglos nur um eine vorgeschriebene Axe bewegen können. Wenn das Endglied innerhalb eines beschränkten Umkreises in jede beliebige Lage gebracht werden soll, müssen sechs solche Gelenke zwischen den Rumpf und das Endglied geschaltet sein und zwar dürfen die Gelenkaxen offenbar nicht alle parallel zu einander sein.

Schliesslich mag noch auf die Möglichkeit der Zusammensetzung verschiedener Drehungen, die ein Körper nacheinander oder auch gleichzeitig ausführt, hingewiesen werden. Von vornherein will ich aber dabei bemerken, dass die ausführliche

Untersuchung der Drehungen sowohl vom rein kinematischen als noch mehr vom vollständigen mechanischen Standpunkte aus das schwierigste Kapitel der ganzen Wissenschaft der Mechanik bildet. Es liegt daher auf der Hand, dass ich mich hier nur mit den einfachsten dabei in Frage kommenden Betrachtungen beschäftigen kann.

Vor allem ist darauf aufmerksam zu machen, dass die Reihenfolge von zwei nacheinander vorzunehmenden endlichen Drehungen um Axen, die im Raume fest liegen, nicht geändert werden darf. So mögen in Abb. 26 OA, OB, OC drei zu einander senkrechte Halbmesser sein und es sei zuerst eine Drehung um einen rechten Winkel um die Axe OB und dann eine ebenfalls rechtwinklige Drehung um OC vorzunehmen. Der Sinn der Drehung sei in jedem Falle durch die Richtung der Strecken OB und OC nach den früher dafür getroffenen Abmachungen angegeben. Man betrachte etwa den Punkt A der Kugelfläche.

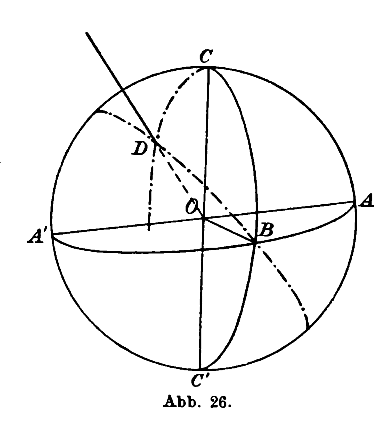


Abb. 26.

Die erste Drehung um OB führt ihn nach C' und bei der zweiten Drehung ändert er seine Lage nicht mehr, weil C' selbst auf der Drehaxe OC liegt. Kehrt man dagegen die Reihenfolge der beiden Drehungen um, so führt die erste Drehung um OC den Punkt A nach B und bei der zweiten Drehung um OB bleibt er in dieser Lage. In der That ist also das Endergebniss der beiden aufeinander folgenden Drehungen ein ganz verschiedenes je nach der Reihenfolge.

Zwei in bestimmter Reihenfolge nacheinander ausgeführte endliche Drehungen kann man auch durch eine einzige resultirende Drehung ersetzen. Schon die Aufgabe der Ermittelung dieser resultirenden Drehung ist keineswegs einfach; sie soll hier nur für die vorher besprochene Aufeinanderfolge der

rechtwinkligen Drehungen um OB und OC in Abb. 26 gelöst werden. Wir sahen schon, dass A nach Vornahme dieser beiden Drehungen nach C' gelangt. Der Punkt B bleibt bei der ersten Drehung in Ruhe und bei der zweiten Drehung gelangt er nach A'. Die Strecke AB geht also schliesslich in die Lage $C'A'$ über. Zur Ermittelung der Richtung der Drehaxe, um die man direct aus der Anfangs- in die Endlage überdrehen kann, verfahre ich so, wie es in Abb. 22 (S. 121) angegeben war. Hiernach wird die Axe der resultirenden Drehung als Schnitt der beiden mittelsenkrechten Ebenen von AC' und BA' gefunden. Die Ausführung der Construction liefert auf der Kugeloberfläche den in die Abb. 26 eingetragenen Punkt D und OD ist die resultirende Drehaxe. Der Drehungswinkel beträgt 120^0 oder $\frac{2}{3}\pi$.

Diese Betrachtungen vereinfachen sich indessen erheblich, wenn die Drehungen, die man zusammensetzen soll, nur unendlich klein sind. Man denke sich etwa in Abb. 26 immer noch um die beiden Axen OB und OC, aber um unendlich kleine Winkel gedreht. Irgend ein Punkt A verschiebt sich bei der ersten Drehung um einen unendlich kleinen Bogen. Denkt man sich die zweite Drehung zuerst ausgeführt, so erhält man einen anderen unendlich kleinen Bogen als Weg des Punktes A auf der Kugelfläche. Wenn dagegen die zweite Drehung erfolgt, nachdem die erste schon vorgenommen ist, wird der von A zurückgelegte Bogen etwas anders ausfallen, denn A hat seine Lage zur zweiten Drehaxe in Folge der vorausgegangenen Bewegung etwas geändert. Der Unterschied ist aber nur unendlich klein von der zweiten Ordnung, denn die Lage von A zur Drehaxe unterscheidet sich in beiden Fällen von vornherein nur unendlich wenig und dazu kommt, dass auch diese Drehung nur um einen unendlich kleinen Winkel vorgenommen wird.

Abgesehen von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung ist es daher auch gleichgültig, in welcher Reihenfolge man zwei unendlich kleine Drehungen nacheinander vornimmt. Man

kann sich daher auch beide gleichzeitig ausgeführt denken; d. h. es hat einen eindeutig bestimmten Sinn, wenn man sagt, dass bei einer unendlich kleinen Lagenänderung zwei Drehungen um gegebene Axen und gegebene kleine Winkel zugleich ausgeführt worden seien. Aus der unendlich kleinen Lagenänderung bei der Drehung ergibt sich durch Division mit dem zugehörigen Zeitelemente die Winkelgeschwindigkeit. Man kann daher auch Winkelgeschwindigkeiten um verschiedene Axen als gleichzeitig bestehend auffassen und sie ohne Rücksicht auf die Reihenfolge zu einer resultirenden Winkelgeschwindigkeit vereinigen.

Man nehme an, dass ein Körper bei der Bewegung um einen festen Punkt zugleich zwei Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ um verschiedene Axen besitze. Die Geschwindigkeit irgend eines Punktes A infolge einer dieser beiden Rotationen kann nach Gl. (57) berechnet werden. Die resultirende Geschwindigkeit von A ist gleich der geometrischen Summe der beiden Einzelgeschwindigkeiten. Man hat also

$$\mathfrak{v} = V\mathfrak{u}_1\mathfrak{r} + V\mathfrak{u}_2\mathfrak{r} = V(\mathfrak{u}_1 + \mathfrak{u}_2)\mathfrak{r} = V\mathfrak{u}\mathfrak{r}.$$

Daraus erkennt man, dass die resultirende Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ gleich der geometrischen Summe von $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ ist. Winkelgeschwindigkeiten werden also genau so zusammengesetzt wie Kräfte. Dass dies bei endlichen Drehungen nicht zutrifft, haben wir an dem Beispiele der Abb. 26 gesehen.

Umgekehrt kann eine gegebene Winkelgeschwindigkeit hiernach auch in Componenten zerlegt werden und man macht davon namentlich beim Rechnen mit Anwendung eines Coordinatensystemes Gebrauch. Die Winkelgeschwindigkeit wird in diesem Falle auf die drei Coordinatenrichtungen projicirt und man kann sich nun die wirkliche Bewegung im gegebenen Augenblicke durch ein Zusammenwirken von Drehungen um die drei Parallelen zu den Coordinatenaxen mit den so berechneten Winkelgeschwindigkeitscomponenten ersetzt denken.

Auch unendlich kleine Drehungen um zwei sich nicht schneidende Axen lassen sich leicht zu einer resultirenden

Bewegung zusammensetzen. Hat man nämlich zwei Punkte O und O', durch die zwei Drehaxen mit den zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}'$ gelegt sind, so verlege man für die Beschreibung der Drehung $\mathfrak{u}$ den Bezugspunkt von O ebenfalls nach O'. Man erhält dann eine Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0'$ in Verbindung mit zwei Drehungen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}'$ um Axen, die beide durch O' gehen und hier zu einer resultirenden Drehung zusammengesetzt werden können. Waren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}'$ parallel zu einander, so ist die Bewegung eine ebene und die zugehörige Momentanaxe kann leicht aufgesucht werden; sie ist ebenfalls parallel zu $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}'$ und liegt in der durch beide Axen gelegten Ebene. Ein besonderer Fall liegt vor, wenn $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}'$ von gleicher Grösse und entgegengesetzt gerichtet sind. Die resultirende Bewegung besteht dann in einer einfachen Translation. Um dies zu erkennen, denke man sich die Punkte O und O' auf beiden Axen in einer senkrecht zu diesen stehenden Ebene gewählt und bezeichne den von O' nach O gezogenen Radiusvector, wie in Abb. 25 mit $\mathfrak{a}$. Für irgend einen Punkt A, von dem die Radienvectoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ nach O und O' gezogen sind, erhält man dann

$$\mathfrak{v} = V\mathfrak{u}\mathfrak{r} + V\mathfrak{u}'\mathfrak{s} = V\mathfrak{u}\mathfrak{r} - V\mathfrak{u}\mathfrak{s} = V\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{s}) = V\mathfrak{u}\mathfrak{a}.$$

In der That hat also jeder Punkt des Körpers nach Richtung und Grösse die gleiche Geschwindigkeit $\mathfrak{v} = V\mathfrak{u}\mathfrak{a}$. Der Absolutwerth der Translationsgeschwindigkeit ist gleich ua, sie steht senkrecht zu der durch beide Drehaxen gelegten Ebene und geht nach jener Seite hin, von der aus gesehen die Pfeile von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}'$ im Uhrzeigersinne gerichtet erscheinen.

Ich bin in diesem Paragraphen etwas ausführlicher geworden, als es für eine erste Einführung in den Gegenstand erforderlich ist. Der Leser, dem die eine oder andere Betrachtung noch nicht ganz verständlich geworden sein sollte, kann daher ohne Schaden einstweilen darüber hinweggehen. Man macht sich mit diesen Dingen am besten vertraut, wenn man sie öfters von Neuem in Angriff nimmt und so durch allmähliche Gewöhnung der Vorstellung über die Schwierig-

keiten der räumlichen Anschauung hinwegkommt, mit denen man anfänglich zu kämpfen hat.

§ 21. Gleichgewicht der Kräfte am starren Körper.

Von einem starren Körper sagt man, dass er im Gleichgewichte sei, wenn er entweder in Ruhe ist oder wenn er eine gradlinige Translationsbewegung mit constanter Geschwindigkeit ausführt. Vom Gleichgewichte des Körpers ist aber das Gleichgewicht der an ihm wirkenden Kräfte wohl zu unterscheiden. Von gegebenen Kräften sagt man nämlich auch immer dann, dass sie sich im Gleichgewichte halten, wenn die weitere Bewegung des Körpers genau so erfolgt, als wenn die ins Auge gefassten Kräfte nicht an ihm angebracht wären. Es kann also sehr wohl sein, dass der Körper nicht im Gleichgewichte ist, sei es weil ausser den grade in Betracht gezogenen Kräften auch noch andere an ihm angreifen, sei es weil der Körper von Anfang an nicht in Ruhe oder in einer Translation begriffen war, während die an ihm wirkenden Kräfte, so weit wir sie grade untersuchen wollen, im Gleichgewichte miteinander stehen.

Wenn der Körper von Anfang an ruhte und alle Kräfte, die an ihm angreifen, im Gleichgewichte miteinander stehen sollen, muss er demnach auch ferner in Ruhe bleiben und immer, wenn diese Bedingung erfüllt ist, sind die Kräfte im Gleichgewichte miteinander. Im anderen Falle, wenn der Körper also in beliebiger Bewegung begriffen ist, beachte man, dass die Kräfte eine Abänderung der ohne ihr Zuthun erfolgenden weiteren Bewegung veranlassen müssten, wenn sie nicht im Gleichgewichte miteinander wären. Nach dem Grundsatze der Unabhängigkeit der Bewegungen von einander haben wir dann zu schliessen, dass eine Abänderung der Bewegung in Folge dieser Kräfte immer eintreten müsste, gleichgültig, welche Bewegung der Körper anfänglich besass. Kräfte, die an einem beliebig bewegten Körper nicht im Gleichgewichte sind, könnten also auch an dem Körper, wenn er ruhte, nicht im Gleich-

gewichte sein. Umgekehrt kann ein System von Kräften, das am ruhenden Körper im Gleichgewichte ist, auch am bewegten Körper keine Aenderung des Bewegungszustandes herbeiführen. Um zu entscheiden, ob sich gegebene Kräfte im Gleichgewichte miteinander halten, genügt es daher stets, sich den Körper in der augenblicklichen Lage in Ruhe vorzustellen und zu untersuchen, ob er dann unter dem Einflusse jener Kräfte auch ferner in Ruhe bleibt.

Von aussen her kann eine Kraft auf einen Körper entweder in der Art übertragen werden, dass alle Massentheilchen des Körpers unmittelbar und gleichartig von ihr ergriffen werden oder so, dass die Kraft unmittelbar nur an einzelnen Stellen und zwar an der Oberfläche des Körpers übertragen wird. Im ersten Falle nennt man die Kraft eine Massenkraft und das wichtigste Beispiel dafür ist das Gewicht des Körpers, das sich auf alle Massentheilchen gleichmässig vertheilt. Wenn nur Kräfte dieser Art einwirken, genügt es gewöhnlich, den Körper als einen materiellen Punkt aufzufassen. Wenn wir dagegen mit Hülfe unseres eigenen Körpers, also etwa mit der Hand, eine Kraft auf einen anderen Körper übertragen wollen, können wir dies nur thun, indem wir diesen Körper anfassen und an der Berührungsstelle die Kraft ausüben. Die Kraft wirkt dann zunächst nur auf die unmittelbar ergriffenen Oberflächentheile ein; wegen des starren Zusammenhangs des ganzen Körpers beeinflusst sie aber zugleich den Bewegungs- oder den Gleichgewichtszustand aller übrigen Massentheile des Körpers.

Thatsächlich vertheilt sich in allen diesen Fällen die Kraft unmittelbar entweder über ein gewisses Volumen (wenn sie eine Massenkraft ist) oder über einen gewissen Theil der Oberfläche (wenn sie eine Oberflächenkraft ist). Man kann aber im letzten Falle die Berührungsfläche sehr klein wählen so dass sich die Angriffsstelle der Kraft nur über einen ganz kleinen Umkreis erstreckt. Man kommt dann dem wirklichen Vorgange schon sehr nahe, wenn man sich die ganze Kraft in einem einzigen Punkte concentrirt denkt. Dieser Punkt

heisst der Angriffspunkt und die Kraft ist hinreichend beschrieben, wenn wir ihre Grösse, ihre Richtung und ihren Angriffspunkt kennen. Wenn die Fläche, auf die sich die Kraft vertheilt, zu gross ist, als dass diese Beschreibung genügen könnte, denken wir sie uns in kleine Flächenelemente eingetheilt und fassen nur die zu jedem Flächenelemente gehörige Kraftübertragung zu einer concentrirten Kraft zusammen, deren Angriffspunkt innerhalb des Flächenelementes liegt. Wir haben dann ebensoviel Einzelkräfte als Flächenelemente. Dadurch, dass man sich die Flächenelemente genügend klein denkt, kann man sich dem wirklichen Vorgange so genau anschliessen, als es nöthig erscheint.

Auch mit einer Massenkraft können wir ähnlich verfahren. So können wir uns das Gewicht des Körpers über die einzelnen Volumenelemente vertheilt denken und das Gewicht jedes Volumenelementes als eine Einzelkraft ansehen, deren Angriffspunkt irgendwo innerhalb des Volumenelementes liegt. Diese Zurückführung der ganzen Kraftäusserung auf ein System von Einzelkräften steht im Zusammenhange mit der Auffassung eines Körpers als eines Haufens materieller Punkte. Als Angriffspunkte der Einzelkräfte sind die Punkte dieses Haufens zu wählen und je grösser die Zahl der materiellen Punkte ist, in die wir uns den Körper zerlegt denken, um so mehr Einzelkräfte müssen wir auch zur Darstellung der ganzen Kraftäusserung wählen.

Eine Kraft, die selbst nur an einem einzelnen materiellen Punkte des Haufens angebracht wird, beeinflusst trotzdem den Bewegungszustand des ganzen Körpers; sie wird daher auch als eine an dem Körper angebrachte Kraft bezeichnet. Der unmittelbar ergriffene Punkt kann wegen des Zusammenhangs mit den übrigen der Kraft nicht frei folgen; er selbst wird also durch diesen Zusammenhang gehemmt und die übrigen werden von ihm mitgenommen. Auch jeder andere Punkt des Körpers bewegt sich demnach nicht so, als wenn nur die unmittelbar von aussen her an ihm angebrachten Kräfte thätig wären. Jeden Einfluss, der bestimmend auf die Be-

wegung eines materiellen Punktes einwirkt, bezeichnen wir aber als eine Kraft. Wir erkennen daraus, dass ausser den unmittelbar von aussen her an den materiellen Punkten des Körpers angebrachten Kräften auch noch andere zwischen den materiellen Punkten selbst wirkende auftreten müssen, durch die der Zusammenhang aufrecht erhalten wird. Diese Kräfte bezeichnen wir als innere.

Bisher war gewöhnlich nur von Kräften die Rede, die auf einen bestimmten materiellen Punkt wirkten, ohne Rücksicht darauf, woher sie stammten. An dieser Stelle muss aber darauf hingewiesen werden, dass der Erfahrung nach jede Kraftäusserung, die wir an einem Körper — den wir uns auch als materiellen Punkt denken können — beobachten, von einem anderen Körper ausgehen muss. Zugleich lehrt die Erfahrung, dass diese Kraftäusserung nicht einseitig erfolgen kann; auch der zweite Körper erfährt eine Kraftäusserung, die von dem ersten ausgeht. Den Inhalt dieser Erfahrungen fasst das Gesetz der Wechselwirkung oder das Princip der Action und Reaction zusammen. Gewöhnlich spricht man es so aus, dass zwischen zwei materiellen Punkten eine Kraftübertragung nur in der Weise erfolgen kann, dass jeder Punkt auf den anderen eine Kraft ausübt, deren Richtungslinie mit der Verbindungslinie beider Punkte zusammenfällt, und dass beide Kräfte gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind. Es kann freilich ein Zweifel darüber erhoben werden, ob das Bild, das man sich hiermit von der mechanischen Wechselwirkung zwischen den Naturkörpern macht, nicht etwas zu sehr specialisirt ist. Wenn es genügt, beide Körper als einzelne materielle Punkte aufzufassen, ist die Aussage allerdings in genauester Uebereinstimmung mit allen Erfahrungen, die darüber jemals gemacht wurden. Bei der Untersuchung der Kraftäusserungen, die ein Magnet im magnetischen Felde der Erde erfährt, bemerken wir aber z. B., dass auch das kleinste Stück des Magneten hierbei nicht als einzelner materieller Punkt aufgefasst werden darf, sondern dass wir dazu immer mindestens zwei materielle

Punkte, die sogenannten Pole, nöthig haben. In einem solchen Falle kann man nicht mit vollem Rechte behaupten, dass sich alle vorkommenden Wechselwirkungen auf solche zwischen einzelnen materiellen Punkten zurückführen lassen müssten. Es ist zwar richtig, dass die Anwendung des Princips der Action und Reaction in der angegebenen Form auch unter diesen Umständen, sobald man zwei Angriffspunkte in jedem Volumenelemente wählt, zu Ergebnissen führt, die mit der Erfahrung übereinstimmen. Immerhin mahnt aber die Eigenart des Falles zu einer gewissen Vorsicht, mit der Specialisirung unserer Bilder nicht zu weit zu gehen. In der That kann man auch allen solchen Einwänden ohne Schwierigkeit durch eine geänderte Fassung des Wechselwirkungsgesetzes entgehen. Man braucht nur festzusetzen, dass allen jemals gemachten Erfahrungen zufolge die von einem Körper auf einen zweiten ausgeübten Kräfte in Verbindung mit den rückwärts von dem zweiten auf den ersten ausgeübten, ein Gleichgewichtssystem miteinander bilden müssen, wenn man sich alle in derselben Richtung, Grösse und Lage an einem starren Körper angebracht denkt. Diese Aussage fasst die frühere als einen speciellen Fall in sich; sie ist aber allgemeiner und nöthigt nicht in Gedanken zu einer Auftheilung des ganzen Körpers in einzelne materielle Punkte, von denen die unmittelbar benachbarten gleichartig zu behandeln wären. Dabei muss ich mir aber vorbehalten, der Aussage auf den folgenden Seiten noch einen präciseren Ausdruck zu geben.

In einem Lehrbuche der technischen Mechanik wäre eine solche genauere Erörterung früher ganz überflüssig gewesen. Seit die magnetischen und die elektrischen Erscheinungen von so grosser Bedeutung für die Praxis des Ingenieurs geworden sind, ist dies aber anders. Die Mechanik bildet das Fundament der ganzen theoretischen Physik, und eine ungenaue Fassung, die bei ihr ohne Weiteres zugelassen würde, könnte später recht verhängnissvoll werden. Man muss dem, der später vielleicht vorwiegend mit Kräften an Magneten oder an elektrischen Strömen zu thun bekommt, von vornherein

den Weg offen lassen, das Wechselwirkungsgesetz in der zuletzt angegebenen Fassung anzuwenden. Sonst steckt er später, wenn er sich in den ganzen Anschauungskreis der Mechanik mit der engeren Fassung des Wechselwirkungsgesetzes vollständig eingelebt hat, in einer Zwangsjacke, die ihn verhindert, die Erscheinungen so aufzufassen, wie es im gegebenen Falle am zweckmässigsten ist. In der That ist grade die sonst so wohlbewährte Auftheilung eines Körpers in einen Haufen von Punkten, die man sich nur durch Kräfte, die längs der graden Verbindungslinien wirken, zusammengehalten denkt, und die im Uebrigen jeder für sich einheitlich und selbständig sind, der Entwickelung der Elektricitätslehre sehr hinderlich gewesen. Man ist damit zur Noth zwar auch ausgekommen und vor Fehlern bewahrt geblieben; die einfachere und zweckmässigere Auffassung der Kräfte zwischen Magneten und Strömen zwischen sich und untereinander ist aber dadurch aufgehalten worden.

Das Gesetz der Action und Reaction in der zuletzt angegebenen Form kommt einfach auf die folgende Bemerkung hinaus. Man denke sich zwei Körper, die irgend welche Kräfte aufeinander ausüben, also etwa zwei Magnete oder einen Magneten und eine Spule, in der ein elektrischer Strom fliesst, durch passende Verbindungsstücke starr miteinander verbunden. Dann kann sich der in dieser Weise zusammengesetzte starre Körper nicht selbst eine Beschleunigung ertheilen, von welcher Art auch im Uebrigen die Kräfte zwischen den einzelnen Bestandtheilen sein mögen. Wenn andere Kräfte von aussen her nicht einwirken, bleibt er also in Ruhe, wenn er anfänglich in Ruhe war.

Wir wollen jetzt annehmen, dass auf einen starren Körper verschiedene Einzelkräfte von aussen her einwirken, von denen bekannt ist, dass sie sich im Gleichgewichte halten. Es fragt sich, welche Bedingungen zwischen den gegebenen Kräften bestehen müssen, damit das Gleichgewicht möglich ist. Zu diesem Zwecke denken wir uns den Körper anfänglich in Ruhe; er muss dann auch ferner in Ruhe bleiben. Dazu gehört, dass auch jedes Massentheilchen in Ruhe verharrt und

dass daher alle Kräfte an diesem Massentheilchen im Gleichgewichte miteinander stehen. Zu diesen Kräften gehören zunächst die äusseren Kräfte, die etwa unmittelbar an diesem Massentheilchen angebracht sind, und ferner die inneren. Von den inneren Kräften wollen wir zunächst annehmen, dass sie dem Wechselwirkungsgesetze in der zuerst ausgesprochenen Form gehorchen, d. h. dass sie auf Kräfte längs der Verbindungsgraden zwischen den einzelnen Massentheilchen zurückgeführt werden können.

Die äussere Kraft an dem betrachteten Massentheilchen, das wir jetzt unter dem Bilde eines einzigen materiellen Punktes auffassen können, oder die Resultirende aus den äusseren Kräften, wenn etwa mehrere an demselben Angriffspunkte angreifen sollten, sei mit $\mathfrak{P}$ und irgend eine von den inneren Kräften, die an diesem materiellen Punkte wirken, sei mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet. Dann erfordert das Gleichgewicht der Kräfte an diesem materiellen Punkte nach den Lehren des vorigen Abschnittes zunächst, dass die geometrische Summe der Kräfte Null ergibt. Wir haben also die Gleichung

$$\mathfrak{P} + \Sigma \mathfrak{J} = 0,$$

wobei sich die Summirung auf alle inneren Kräfte erstreckt, die überhaupt an dem betrachteten materiellen Punkte auftreten. Eine Gleichung von dieser Art muss auch für jeden anderen materiellen Punkt des ganzen Körpers gelten. Wir wollen uns alle diese Gleichungen angeschrieben denken und sie hierauf summiren. Dann erhalten wir

$$\Sigma \mathfrak{P} + \Sigma \Sigma \mathfrak{J} = 0.$$

Das Summenzeichen vor $\mathfrak{P}$ schreibt vor, dass alle äusseren Kräfte an dem ganzen Körper geometrisch summirt werden sollen. Von den beiden Summenzeichen vor $\mathfrak{J}$ bezieht sich das eine auf die Summirung aller inneren Kräfte an irgend einem materiellen Punkte und das andere gibt an, dass auch die sämmtlichen inneren Kräfte an allen übrigen materiellen Punkten in die Summirung eingeschlossen werden sollen. Angenommen nun, $\mathfrak{J}_{12}$ sei die innere Kraft, die von dem mit

der Ordnungsnummer 2 bezeichneten Punkte auf den mit der Nummer 1 versehenen übertragen wird. Dann steht ihr nach dem Wechselwirkungsgesetze eine Kraft $\mathfrak{J}_{21}$ an dem Punkte 2 gegenüber, die von dem Punkte 1 herrührt, und beide sind gleich gross, fallen in die Verbindungslinie beider Punkte und sind entgegengesetzt gerichtet. Jedenfalls ist also

$$\mathfrak{J}_{12} + \mathfrak{J}_{21} = 0.$$

In der Gesammtsumme $\Sigma\Sigma\mathfrak{J}$ aller inneren Kräfte heben sich demnach je zwei Glieder gegeneinander auf und wir finden

$$\Sigma\Sigma\mathfrak{J} = 0.$$

Damit vereinfacht sich aber die frühere Gleichgewichtsbedingung zu

$$\Sigma\mathfrak{P} = 0, \tag{60}$$

d. h. wenn man sich alle äusseren Kräfte in derselben Richtung und Grösse an einem einzigen Angriffspunkte angebracht dächte, müssten sie an diesem ebenfalls im Gleichgewichte stehen, wenn sie an dem Körper im Gleichgewichte stehen sollen. Gl. (60) ist demnach eine nothwendige, aber keineswegs eine hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte am Körper. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man annimmt, dass von aussen her nur zwei Einzelkräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ (Abb. 27) auf den Körper wirken, die gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind, deren Richtungslinien aber nicht in dieselbe Grade fallen. Den Verein von zwei solchen Kräften nennt man ein Kräftepaar, auch Drehpaar oder kurz Paar. Mit den Kräftepaaren werden wir uns später noch ausführlich zu beschäftigen haben. Schon jetzt sieht man aber auf Grund der alltäglichen Erfahrung ein, dass ein Kräftepaar den Körper in Bewegung zu setzen, ihm nämlich eine Drehung zu er-

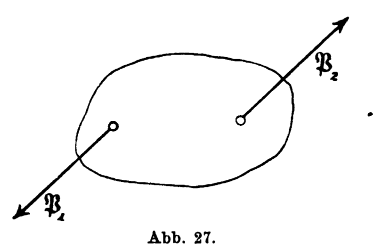


Abb. 27.

theilen vermag, obschon die nothwendige Bedingung $\Sigma\mathfrak{P} = 0$ für das Gleichgewicht hier erfüllt ist.

Nun hatten wir aber noch andere Gleichgewichtsbedingungen bei der Mechanik des materiellen Punktes aufgefunden, die dort freilich mit der Gleichung $\Sigma\mathfrak{P} = 0$ im Wesentlichen gleichbedeutend waren, die aber, wenn wir sie nun auf den Punkthaufen übertragen, zu einer wichtigen Ergänzung der für sich allein nicht ausreichenden Gleichung (60) führen.

Wir wählen irgend einen Momentenpunkt, von dem aus wir die Hebelarme $\mathfrak{r}$ nach den einzelnen materiellen Punkten ziehen. Für irgend einen der materiellen Punkte haben wir dann auch die Gleichgewichtsbedingung

$$V\mathfrak{P}\mathfrak{r} + \Sigma V\mathfrak{J}\mathfrak{r} = 0.$$

Auch diese Gleichung denken wir uns für jeden materiellen Punkt angeschrieben und hierauf alle summirt; wir finden, ganz wie vorher,

$$\Sigma V\mathfrak{P}\mathfrak{r} + \Sigma\Sigma V\mathfrak{J}\mathfrak{r} = 0.$$

Aus Abb. 28 erkennt man aber, dass für die beiden zusammengehörigen inneren Kräfte $\mathfrak{J}_{12}$ und $\mathfrak{J}_{21}$ auch

$$V\mathfrak{J}_{12}\mathfrak{r}_1 + V\mathfrak{J}_{21}\mathfrak{r}_2 = 0$$

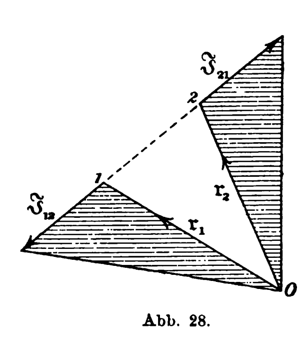


Abb. 28.

ist, denn die beiden Momentendreiecke sind gleich gross und der Drehsinn der Kräfte, von O aus gesehen, ist entgegengesetzt. Demnach heben sich auch in der Gesammtsumme der Momente aller inneren Kräfte je zwei Glieder gegeneinander auf und wir erhalten

$$\Sigma\Sigma V\mathfrak{J}\mathfrak{r} = 0,$$

womit sich die vorige Gleichgewichtsbedingung durch Wegfallen der ihrer Grösse, Richtung und Vertheilung nach unbekannten inneren Kräfte vereinfacht zu

$$\Sigma V\mathfrak{P}\mathfrak{r} = 0, \tag{61}$$

die für jeden beliebigen Momentenpunkt erfüllt sein muss. Dass wir hiermit zu einer für den starren Körper gegenüber Gl. (60) wesentlich neuen und mehr aussagenden Gleichgewichtsbedingung gelangt sind, erkennt man sofort daraus, dass Gl. (61) von einem Kräftepaare nicht mehr erfüllt wird. Man denke sich nur den Momentenpunkt auf die eine Kraft des Paares verlegt; dann verschwindet zwar deren Moment, aber nicht das Moment der anderen Kraft und auch die Momentensumme ist daher von Null verschieden.

Wir hatten ferner bei der Mechanik des materiellen Punktes das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bewiesen und wollen auch dieses auf den starren Körper übertragen. Zu diesem Zwecke denken wir uns dem Körper eine willkürliche (virtuelle) Bewegung ertheilt. Diese Bewegung kann zwar auch von endlicher Grösse sein; gewöhnlich wird aber das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten am starren Körper nur auf unendlich kleine Lagenänderungen angewendet, und wir wollen es daher von vornherein für eine solche ableiten. Der Uebertragung auf eine Bewegung von endlicher Grösse steht nachher ohnehin nichts im Wege, da sich jede endliche Bewegung auf eine Summe von unendlich kleinen Lagenänderungen zurückführen lässt.

Der sehr kleine Weg, den irgend ein materieller Punkt bei dieser virtuellen Lagenänderung zurücklegt, sei mit $\mathfrak{s}$ bezeichnet. Dann ist zunächst für diesen materiellen Punkt

$$\mathfrak{P}\mathfrak{s} + \Sigma \mathfrak{J}\mathfrak{s} = 0,$$

und wenn wir, wie vorher, diese Gleichung auf alle Punkte des Körpers anwenden und summiren, erhalten wir

$$\Sigma \mathfrak{P}\mathfrak{s} + \Sigma\Sigma \mathfrak{J}\mathfrak{s} = 0.$$

Wenn der Körper während der Bewegung seine Gestalt nicht ändert, fällt aber auch in diesem Falle das sich auf die inneren Kräfte beziehende Glied der Gleichung fort. Sind nämlich $\mathfrak{J}_{12}$ und $\mathfrak{J}_{21}$ wieder die früher damit bezeichneten inneren Kräfte, so denke man sich, um zu beweisen, dass die Summe ihrer Arbeiten verschwindet, den Punkt 1 als Bezugs-

punkt für die Beschreibung der unendlich kleinen Lagenänderung gewählt. Die Bewegung zerfällt dann in eine Translation, durch die Punkt 1 in seine neue Lage 1′ gelangt und in eine darauf folgende Rotation um diesen Punkt. Bei der Translation beschreiben alle Punkte gleiche Wege. Auch die Projectionen der Wege auf die Verbindungslinie der Punkte 1 und 2 sind daher gleich. Da nun $\mathfrak{J}_{12}$ entgegengesetzt gerichtet mit $\mathfrak{J}_{21}$ ist, leistet eine dieser Kräfte bei der Translation eine positive, die andere eine ebensogrosse negative Arbeit; die Summe beider Arbeiten ist daher Null. Nun lasse man die Rotation folgen. Bei dieser bewegt sich der Angriffspunkt von $\mathfrak{J}_{12}$ überhaupt nicht; ihre Arbeit ist also Null. Aber auch die Arbeit von $\mathfrak{J}_{21}$ ist Null, denn ihr Angriffspunkt bewegt sich zwar, aber in einer Richtung, die senkrecht zu dem Radius von 1 nach 2, also auch senkrecht zur Kraftrichtung steht. In der That ist also bei der ganzen Lagenänderung die Summe aller von $\mathfrak{J}_{12}$ und $\mathfrak{J}_{21}$ geleisteten Arbeiten Null, oder in Form einer Gleichung

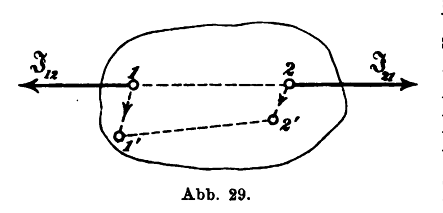


Abb. 29.

$$\mathfrak{J}_{12}\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{J}_{21}\mathfrak{s}_2 = 0, \qquad (62)$$

wobei noch wohl zu beachten ist, dass dasselbe Resultat auch für irgend zwei äussere Kräfte gilt, die in derselben Beziehung zu einander stehen, wie hier $\mathfrak{J}_{12}$ und $\mathfrak{J}_{21}$, so nämlich, dass die eine gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet ist, wie die andere, während die Richtungslinien in eine Grade fallen. Wesentlich für die Beweisführung ist nur, dass sich der Abstand der Punkte 1 und 2 nicht ändern darf. Das ist aber durch die Voraussetzung ausgeschlossen, dass der Körper starr sei. Dagegen soll jetzt schon darauf aufmerksam gemacht werden, dass bei einer Gestaltänderung der Körper, z. B. bei elastischen Körpern die inneren Kräfte ebenfalls Arbeit leisten. Diese Arbeit wird als Formänderungsarbeit bezeichnet und wir werden uns bei späteren Gelegenheiten mit dieser vielfach zu

beschäftigen haben. Hier gilt aber jedenfalls Gl. (62) und mit ihr auch

$$\Sigma\Sigma\mathfrak{J}\mathfrak{s} = 0,$$

da sich in der Gesammtsumme der Arbeiten aller inneren Kräfte je zwei Glieder gegeneinander fortheben.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für das Gleichgewicht der Kräfte am starren Körper lässt sich demnach in die einfache Gleichung zusammenfassen, dass für jede virtuelle Verrückung

$$\Sigma\mathfrak{P}\mathfrak{s} = 0 \tag{63}$$

sein muss. Auch diese Gleichung lässt sofort erkennen, dass ein Körper, an dem von aussen her nur ein Kräftepaar wirkt, nicht im Gleichgewichte sein kann. Denn man denke sich nur dem Körper eine Rotation um eine beliebige Axe ertheilt, die etwa durch den Angriffspunkt der ersten Kraft des Paares gelegt ist. Dann leistet zwar diese keine Arbeit, wohl aber die andere Kraft des Paares und die Gleichgewichtsbedingung (63) ist daher nicht erfüllt.

Die ganze Beweisführung, die zu den Formeln (60) bis (63) führte, lässt uns freilich im Stiche, sobald wir es als zweifelhaft ansehen, ob es zulässig ist, alle inneren Kräfte auf Kräfte längs der Verbindungsgraden der einzelnen materiellen Punkte des Haufens zurückzuführen. In diesem Falle müssen wir dem Gesetze der Wechselwirkung einen anderen geeigneten Ausdruck geben, auf den schon vorher, als zuerst davon die Rede war, hingewiesen wurde. Wir setzen zu diesem Zwecke fest, dass für die inneren Kräfte, gleichgültig, wie sie nun im Einzelnen vertheilt seien, um den Erfahrungen gerecht zu werden, jedenfalls

$$\Sigma\Sigma\mathfrak{J} = 0; \quad \Sigma\Sigma \mathrm{V}\mathfrak{J}\mathfrak{r} = 0; \quad \Sigma\Sigma\mathfrak{J}\mathfrak{s} = 0 \tag{64}$$

gesetzt werden muss, womit an der Gültigkeit der Gleichungen (60) bis (63) nichts geändert wird. Wir befinden uns damit in Uebereinstimmung mit der früheren Aussage, dass Wirkung und Gegenwirkung, wenn man sie als äussere

Kräfte an demselben starren Körper angreifen lässt, den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen genügen müssen. Jene Aussage war nur noch nicht bestimmt genug gefasst, um weitere Schlüsse auf sie stützen zu können; die Ergänzung, die hierzu erforderlich war, wird durch die Gleichungen (64) geliefert.

Uebrigens ist durch die Gleichungen (64) das Wechselwirkungsgesetz nicht nur für die inneren Kräfte desselben Körpers näher bestimmt, sondern auch für die Kräfte zwischen zwei verschiedenen Körpern. Denn man braucht sich, wie es auch vorher schon einmal angedeutet war, beide Körper nur im gegebenen Augenblicke in starre Verbindung miteinander gebracht zu denken. Dann werden die Kräfte zwischen beiden Körpern zu inneren Kräften des ganzen Systems, die nun den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen genügen müssen.

§ 22. Zusammensetzen der Kräfte am starren Körper.

Die Aufgabe, zwei Einzelkräfte, die an verschiedenen Punkten eines starren Körpers angreifen, durch eine Resultirende oder durch mehrere andere Kräfte zu ersetzen, ist von ganz anderer Art, wie die gleiche Aufgabe für den einzelnen materiellen Punkt. Beim materiellen Punkte ersetzt die Resultirende die beiden Componenten in jeder Hinsicht; beim starren Körper ersetzt die Resultirende, falls eine solche überhaupt angegeben werden kann, die Componenten nur in Hinsicht auf den Bewegungszustand des Körpers. Die Vertheilung der inneren Kräfte wird dagegen vollständig geändert. So lange man sich um die inneren Kräfte nicht zu kümmern braucht, macht dies zwar nichts aus. Es ist aber gut, wenn man diesen Unterschied von Anfang an wohl im Auge behält, denn bei allen Aufgaben der Festigkeitslehre kommt es auf die Vertheilung der inneren Kräfte sehr wesentlich an und man darf daher von den Lehren, die hier entwickelt werden sollen, dort nur mit Vorsicht Gebrauch machen.

Die Lehre von der Kräftezusammensetzung am starren Körper beruht auf dem Satze, dass zwei Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$

von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung, deren Richtungslinien auf die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte fallen, ein Gleichgewichtssystem miteinander bilden. Schon in den Entwickelungen des vorigen Paragraphen ist wiederholt darauf hingewiesen worden, dass zwei Kräfte dieser Art allen dort aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen genügen. Es ist aber bisher nur gezeigt worden, dass diese Gleichgewichtsbedingungen nothwendig und noch nicht, dass sie auch hinreichend sind, d. h. dass ein System von Kräften, das diesen Bedingungen genügt, auch wirklich im Gleichgewichte steht. Dieser Nachweis soll jetzt erbracht werden.

Dazu gehe ich von dem im § 15 bewiesenen Satze aus, dass für einen einzelnen materiellen Punkt die Arbeit der an ihm angreifenden Kraft oder die Arbeit der Resultirenden, wenn mehrere Kräfte an ihm angreifen, gleich dem Zuwachse der lebendigen Kraft ist. Unter der lebendigen Kraft eines Körpers verstehe ich die Summe der lebendigen Kräfte aller seiner Massentheilchen. Jedes Glied dieser Summe ist seiner Definition nach positiv; auch die lebendige Kraft eines Körpers kann daher nur positiv oder Null sein und Null nur dann, wenn der ganze Körper ruht.

Nun denke man sich ein System von äusseren Kräften $\mathfrak{P}$ an dem starren Körper angebracht, das für jede virtuelle Verrückung der Gleichung (63)

$$\Sigma \mathfrak{P} \mathfrak{s} = 0$$

genügt. Wenn die Kräfte trotzdem nicht im Gleichgewichte miteinander stehen sollten, müssten sie im Stande sein, dem ruhenden Körper eine Bewegung zu ertheilen. Dabei müsste der Körper eine gewisse lebendige Kraft annehmen und diese wäre nach dem angeführten Satze gleich der Summe der Arbeiten aller Kräfte, die an allen Massentheilchen des Körpers wirken. Nach den Gleichungen (64) verschwindet aber, wie man auch das Wechselwirkungsgesetz fassen möge, jedenfalls die Summe der Arbeitsleistungen aller inneren Kräfte. Die Summe der Arbeiten der äusseren Kräfte ist aber nach Voraus-

setzung ebenfalls Null. Desshalb muss auch die Aenderung der lebendigen Kraft Null sein, und da der Körper vorher ruhte, kann er auch nachher nur die lebendige Kraft Null haben. Wir erkennen daraus, dass die angenommene Bewegung unter dem alleinigen Einflusse der Kräfte $\mathfrak{P}$ nicht zu Stande kommen kann. Die Bedingung $\Sigma \mathfrak{P}\mathfrak{s} = 0$ für jede virtuelle Verrückung ist demnach nicht nur eine nothwendige, sondern zugleich eine hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte $\mathfrak{P}$.

Jedenfalls ist damit bewiesen, dass die zuvor erwähnten Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$, auf die es jetzt allein ankommt, im Gleichgewichte miteinander stehen. Man darf also zwei solche Kräfte zu anderen, die etwa daneben noch vorkommen, zufügen oder sie davon wegnehmen, ohne den Gleichgewichtszustand oder die Bewegung des starren Körpers zu ändern. Die Vertheilung der inneren Kräfte erfährt aber natürlich durch die Zufügung oder Wegnahme eine Aenderung.

Aus dem bewiesenen Satze folgt weiter der Satz von der Verschiebung des Angriffspunktes. Denkt man sich nämlich zu einer Kraft $\mathfrak{Q}$ (Abb. 30), die an irgend einem Punkte A des Körpers angreift, noch zwei Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ zugesetzt von gleicher Grösse mit $\mathfrak{Q}$, von denen $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ an demselben Angriffspunkte wirkt und ihr entgegengesetzt gerichtet ist, während die andere dieser gleich gerichtet ist und an irgend einem anderen, auf derselben Richtungslinie liegenden Punkte des Körpers angreift, so ist das System dieser drei Kräfte nach dem zuvor bewiesenen Satze mit der Kraft $\mathfrak{Q}$ gleichwerthig. Von den drei Kräften heben sich aber $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gegeneinander auf und es bleibt daher nur $\mathfrak{P}'$ als Ersatz von $\mathfrak{Q}$ übrig. Der Unterschied zwischen $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}$ besteht aber nur darin, dass der Angriffspunkt der einen Kraft längs der Richtungslinie gegen den Angriffspunkt der anderen verschoben

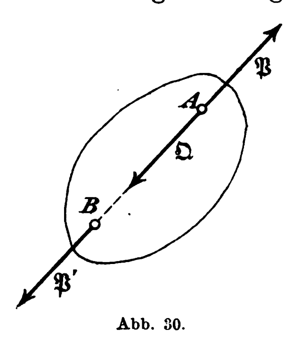


Abb. 30.

ist. Eine solche Verschiebung ist daher immer zulässig, so lange es auf die Vertheilung der inneren Kräfte, die hierbei freilich geändert wird, nicht ankommt.

Der Satz von der Verschiebung des Angriffspunktes gestattet uns nun auch, zwei Kräfte an verschiedenen Punkten desselben starren Körpers, deren Richtungslinien sich schneiden, zu einer Resultirenden zu vereinigen. Man verlegt dazu beide Angriffspunkte nach dem Schnittpunkte der Richtungslinien und kann die Kräfte, da sie jetzt an demselben materiellen Punkte angreifen, nach den Lehren des vorigen Abschnitts vereinigen, indem man ihre geometrische Summe bildet. Nachträglich kann natürlich auch der Angriffspunkt dieser Resultirenden wieder beliebig längs deren Richtungslinie verschoben werden.

An dieser Stelle wird eine Bemerkung über die Bedeutung der Angriffspunkte von Kräften am starren Körper von Nutzen sein. Wir sahen, dass es zulässig ist, den Angriffspunkt längs der Richtungslinie zu verschieben. Mit Rücksicht darauf ist es häufig gar nicht nöthig, den Angriffspunkt einer Kraft überhaupt genauer zu bestimmen, sondern es genügt, die Richtungslinie anzugeben, auf der man den Angriffspunkt nach Belieben wählen mag. Indessen ist dies, wie aus den vorausgehenden Betrachtungen folgt, nur dann zulässig, wenn die Vertheilung der inneren Kräfte gleichgültig ist. Da nun das wirkliche Verhalten der Naturkörper durch den Spannungszustand, in den sie versetzt werden, mit bedingt ist, so folgt, dass die genauere Angabe des Angriffspunktes nicht unter allen Umständen, sondern nur insofern entbehrlich ist, als der Körper im gegebenen Falle thatsächlich als starr betrachtet werden darf. Von einer Resultirenden aus zwei Kräften, wie wir sie vorher bildeten, ist dagegen die Angabe des Angriffspunktes unter allen Umständen entbehrlich, denn die Zusammensetzung, die zu ihr führte, ist an und für sich nur dann berechtigt, wenn es auf die inneren Kräfte nicht ankommt. Eine solche Resultirende ist in der That nur eine Rechnungsgrösse, der keine unmittelbare physikalische Bedeutung, wie etwa einer

direkt gegebenen äusseren Kraft, zukommt. Man findet zuweilen in der Litteratur Betrachtungen, die den Zweck haben sollen, den Angriffspunkt derartiger Resultirenden näher zu bestimmen; nach dem, was ich vorher darüber sagte, hat aber ein solches Bestreben gar keinen physikalischen Sinn.

Auch zwei Kräfte, deren Richtungslinien parallel zu einander sind, lassen sich in der Regel durch eine einzige Kraft ersetzen. Um z. B. die Kräfte $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ in Abb. 31 zu einer Resultirenden zu vereinigen, führe man zwei neue Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ ein, die sich gegenseitig aufheben. Dann setze man $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}_1$, die an demselben Angriffspunkte wirken, zu $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{Q}_2$ zu $\mathfrak{U}_2$ zusammen. Die Richtungslinien von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ schneiden sich jetzt und man gelangt nach dem früheren Verfahren zur Resultirenden $\mathfrak{R}$, die nun alle vier Kräfte und demnach auch die beiden ursprünglich gegebenen ersetzt.

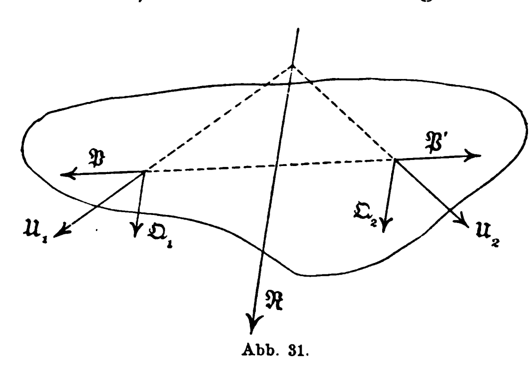


Abb. 31.

Gewöhnlich ist es übrigens bequemer, die Lage der Resultirenden $\mathfrak{R}$, auf deren Ermittelung es bei dieser Construction allein ankommt, durch Anwendung des Momentensatzes zu bestimmen. Das Moment von $\mathfrak{R}$ muss für jeden Momentenpunkt gleich der Summe der Momente von $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ sein. Legt man den Momentenpunkt auf $\mathfrak{R}$, so muss das Moment von $\mathfrak{Q}_1$ gleich gross und entgegengesetzt gerichtet mit dem Momente von $\mathfrak{Q}_2$ sein, also bei Bezeichnung der rechtwinklig gezogenen Hebelarme mit kleinen Buchstaben

$$Q_1 q_1 = Q_2 q_2 \quad \text{und daher} \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Wenn $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ gleich gerichtet sind, liegt daher die Resultirende zwischen ihnen und sie theilt den Abstand zwischen

beiden in zwei Abschnitte, die sich umgekehrt wie die Kräfte verhalten.

Auch wenn $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ entgegengesetzt gerichtet sind, lässt sich das Verfahren anwenden. Die Resultirende liegt dann ausserhalb des Parallelstreifens auf der Seite der grösseren Kraft und ist mit dieser gleich gerichtet, während sich die Abstände von beiden Kräften immer noch umgekehrt wie die Kräfte verhalten. Es kann dabei freilich vorkommen, dass die Richtungslinie der Resultirenden gar keinen Punkt mehr mit dem Körper gemeinsam hat. Physikalisch wäre dann die Vereinigung beider Kräfte, auch abgesehen von dem Spannungszustande, nicht mehr ausführbar. Man lässt sich aber dadurch gewöhnlich nicht stören, weil man ohnehin weiss, dass die gesuchte Resultirende nur den Sinn einer Rechnungsgrösse hat. Um sich klar vorzustellen, was mit ihr gemeint ist, genügt es, sich den Körper nach der betreffenden Seite hin mit einer Handhabe versehen zu denken, die nur eine starre Verbindung des Angriffspunktes mit dem Körper herbeiführt, sonst aber an dem Körper nichts ändert; namentlich muss man sich diese Handhabe als masselos vorstellen.

Zu solchen Hülfsvorstellungen wird man namentlich genöthigt, wenn die eine Kraft nicht viel grösser ist, als die andere, die man mit ihr zusammensetzen will. Je weniger sich beide in der Grösse von einander unterscheiden, desto weniger weichen nämlich auch die Richtungen der Resultirenden $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ von einander ab; um so weiter weg fällt also auch deren Schnittpunkt. Im Grenzfalle, wenn $\mathfrak{Q}_1 = -\mathfrak{Q}_2$ ist, wird auch $\mathfrak{U}_1 = -\mathfrak{U}_2$ und die vorige Construction führt nicht mehr zum Ziele. Die Zufügung der Kräfte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ bewirkt nur, dass das eine Kräftepaar — diesen Namen führten wir schon früher für zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte mit parallelen Richtungslinien ein — durch ein anderes ersetzt wird.

Man kann diesen Fall von zwei verschiedenen Seiten her auffassen. Zunächst kann man davon ausgehen, dass $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ ursprünglich verschieden gross waren und dass dann die kleinere — sagen wir $\mathfrak{Q}_2$ — allmählich bis zur Grösse von

$\mathfrak{Q}_1$ anwächst. Vorher waren wir schon genöthigt, eine Handhabe anzubringen, um die Resultirende aus beiden aufzunehmen. Je mehr sich $\mathfrak{Q}_2$ der Grösse von $\mathfrak{Q}_1$ nähert, desto kleiner wird die Resultirende — denn diese ist stets gleich $\mathfrak{Q}_1 - \mathfrak{Q}_2$ — und um so länger wird die Handhabe. Legt man einen Momentenpunkt auf $\mathfrak{Q}_2$, so muss in allen Augenblicken das statische Moment der Resultirenden denselben Werth, nämlich den Werth $Q_1 q_1$ haben. Zuletzt wird die Resultirende unendlich klein und die Länge der Handhabe unendlich gross, aber so, dass das Product aus beiden den endlichen Werth $Q_1 q_1$ behält. Man sagt daher, dass ein Kräftepaar einer unendlich kleinen, aber unendlich fernen Kraft gleichwerthig ist. Das ist freilich eine ziemlich gekünstelte Art der Auffassung; da es sich aber bei allen Resultirenden von Kräften am starren Körper nur um mathematische Constructionen handelt, mit denen man die vorkommenden Aufgaben besser zu lösen vermag, so liegt auch gegen diese Auffassung kein Bedenken vor. In der That wird sich später zeigen, dass ähnlich wie in der Geometrie, auch bei der Kräftezusammensetzung die Heranziehung von unendlich fernen Elementen zur Vereinfachung der Darstellung und zur Gewinnung einer klaren Uebersicht viel beizutragen vermag.

Nach der eben beschriebenen Auffassung stellt sich das Kräftepaar nur als ein besonderer Fall einer Einzelkraft dar. Gewöhnlich ist aber eine andere Auffassung vorzuziehen. Bei dieser wird das Kräftepaar ebenfalls als etwas einheitlich Gegebenes betrachtet; es wird aber in einen Gegensatz zur Einzelkraft gebracht. So nämlich wie die Einzelkraft zunächst eine fortschreitende Bewegung des von ihr ergriffenen Punktes herbeizuführen sucht, strebt das Kräftepaar eine Drehung des ganzen Körpers an. Stellt man die beiden Kräfte des Paares in gewöhnlicher Weise durch Strecken dar, die auf den Richtungslinien abgetragen sind, so erhält man durch Verbinden der 4 Endpunkte ein Parallelogramm. Dieses Parallelogramm wird als bildliche Wiedergabe des Kräftepaares betrachtet. Die Grösse des Kräftepaars wird nun nicht mehr durch die

Grösse der Einzelkräfte und ihre gegenseitige Lage, sondern durch die Fläche des Parallelogramms gemessen. Anstatt dessen kann man sich auch in irgend einem Punkte des Parallelogramms eine Senkrechte zur Parallelogrammebene nach jener Seite hin errichtet denken, von der aus gesehen das Kräftepaar eine Drehung im Uhrzeigersinne zu bewirken sucht, und auf dieser Senkrechten eine Strecke abtragen, die in irgend einem Maassstabe den Inhalt der Parallelogrammfläche angibt (Abb. 32). Diese Strecke stimmt mit dem statischen Momente des Kräftepaars überein. Unter diesem statischen Momente ist nämlich die Summe der Momente beider Kräfte für den gewählten Momentenpunkt zu verstehen. Denkt man sich nun die Momentendreiecke für beide Kräfte gezeichnet, so erkennt man, dass ihre Summe gleich der Hälfte des Parallelogramms ist. Hieraus folgt auch, dass das Moment des Kräftepaars für alle Momentenpunkte, die man innerhalb des Parallelogramms (oder auch ausserhalb) wählen mag, dieselbe Grösse hat.

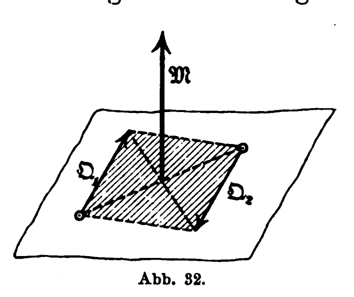


Abb. 32.

Alle diese Betrachtungen werden an einer anderen Stelle (in der graphischen Statik) weiter durchgeführt werden und ich gehe daher jetzt nicht näher darauf ein. Nur die Arbeit, die ein Kräftepaar bei einer unendlich kleinen Lagenänderung des starren Körpers leistet, soll noch berechnet werden, weil man dabei auf einen einfachen Ausdruck geführt wird, von dem man oft mit Nutzen Gebrauch machen kann. Zunächst ist klar, dass die Arbeit des Kräftepaars für jede Translationsbewegung gleich Null ist. Denn die Wege beider Angriffspunkte sind gleich gross und gleichgerichtet und dasselbe gilt auch von ihren Projectionen auf die Richtungslinien der Kräfte. Die eine Kraft leistet daher eine positive und die andere eine ebenso grosse negative Arbeit, so dass die Arbeit des ganzen Kräftepaars in der That zu Null wird.

Wir können uns nun zur Beschreibung der beliebigen unendlich kleinen Bewegung des Körpers den Angriffspunkt der einen Kraft als Bezugspunkt gewählt denken. Die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ der Drehung wollen wir uns wie früher als Vector abgetragen denken und zunächst voraussetzen, dass $\mathfrak{u}$ gleich gerichtet mit dem Momente des Kräftepaars sei. Der Drehungswinkel im Zeitelemente dt hat die Grösse udt. Bei dieser Drehung leistet die Kraft, deren Angriffspunkt wir als Bezugspunkt wählten, keine Arbeit und die Arbeit der anderen Kraft ist gleich $Ppudt$, wenn P die Grösse der Kraft und p ihr senkrechter Abstand vom Bezugspunkte ist. Wenn mit $\mathfrak{M}$ das Moment des Kräftepaars bezeichnet wird, kann man dafür auch

$$\mathfrak{M}\mathfrak{u}dt$$

setzen. Ist $\mathfrak{u}$ entgegengesetzt gerichtet mit $\mathfrak{M}$, so wird die Arbeit negativ und das innere Product aus $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{u}dt$ stellt immer noch die Arbeit auch dem Vorzeichen nach richtig dar.

Wenn endlich $\mathfrak{u}$ eine beliebige Richtung hat, können wir es in eine Drehungscomponente zerlegen, die in die Richtungslinie von $\mathfrak{M}$ fällt, und in eine andere, die senkrecht zu ihr steht. Für diese letzte Drehungscomponente ist aber die Arbeit des Kräftepaars Null, denn der Weg der durch den Bezugspunkt gehenden Kraft des Paares ist immer noch Null und der Weg des Angriffspunktes der anderen steht senkrecht zur Richtungslinie der Kraft. Von allen Bewegungscomponenten führt also nur die Drehung um eine zur Ebene des Kräftepaars senkrechte Axe zu einer Arbeitsleistung des Kräftepaars. Die in dieser Richtung genommene Componente der Drehung ist aber gleich der Projection von $\mathfrak{u}$ auf die Richtung von $\mathfrak{M}$. Demnach stellt auch noch bei jeder beliebigen unendlich kleinen Bewegung das innere Product

$$\mathfrak{M}\mathfrak{u}dt$$

die Arbeitsleistung richtig dar. Die Arbeitsleistung des Kräftepaars wird daher nach derselben Regel gefunden wie die Arbeit einer Einzelkraft; an die Stelle der Einzelkraft tritt hier das Moment des Kräftepaars und an die Stelle der Verschiebung

des Angriffspunktes tritt der Drehungswinkel. Wie dort nur die innere, also die in die Richtung der Kraft fallende Componente der Verschiebung in Betracht kam, kommt es hier nur auf die innere Componente der Drehung an.

Bisher war immer nur von der Resultirenden aus zwei Kräften die Rede, deren Richtungslinien in derselben Ebene liegen. Man sieht aber leicht ein, dass man durch Wiederholung des Verfahrens auch beliebig viele Kräfte, die alle in einer Ebene liegen, zu einer Resultirenden vereinigen kann, falls man nicht etwa ausnahmsweise auf ein resultirendes Kräftepaar geführt wird. — Zwei Kräfte, deren Richtungslinien windschief zu einander liegen, kann man dagegen niemals durch eine einzige Kraft ersetzen. Man kann zeigen, dass man beliebig viele windschief zu einander liegende Kräfte immer auf zwei Einzelkräfte oder auch auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar zurückführen kann; darauf werde ich aber erst bei einer späteren Gelegenheit näher eingehen.

§ 23. **Hebel, Balken und Platte.**

Im allgemeinsten Sinne des Wortes ist unter einem Hebel ein in einem festen Gestelle drehbar gelagerter Körper zu verstehen, an dem mehrere Kräfte im Gleichgewichte miteinander stehen. Gewöhnlich wird zwar zugleich eine langgestreckte, stabförmige Gestalt des Hebels vorausgesetzt; für die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen ist dies aber belanglos.

Die Auflagerung des Hebels im Gestelle kann entweder durch eine Schneide oder durch einen Zapfen erfolgen. In jedem Falle kommt dem Hebel nur noch ein Freiheitsgrad zu; er kann sich nur um die Schneide oder um die Axe des Zapfens drehen. Jede andere Bewegung wird durch den Auflagerdruck verhindert. Der Auflagerdruck kann bei der Schneide als längs einer Linie vertheilt angesehen werden, während er sich bei dem Zapfen über einen grösseren Theil des Umfangs vertheilt. Eine äussere Kraft, deren Richtungslinie durch die

Schneide geht, kann nach der Schneide verlegt werden; sie bringt dort einen Auflagerdruck hervor, kann aber das Gleichgewicht des Hebels nicht stören. Jede andere Kraft sucht den Hebel zu drehen.

Es ist oft zweckmässig, zu jeder gegebenen äusseren Kraft $\mathfrak{P}$ noch zwei Kräfte $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ zuzufügen, die parallel zu $\mathfrak{P}$ durch die Drehungsaxe gehen und von denen $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}' = -\mathfrak{P}$ ist. Alle drei Kräfte sind dann der ursprünglich gegebenen Kraft $\mathfrak{P}$ gleichwerthig. Hiervon kann aber $\mathfrak{P}''$ weggelassen werden, da $\mathfrak{P}''$ durch die Drehungsaxe geht und daher für sich keine Bewegung des Hebels herbeiführen kann. Die beiden anderen Kräfte $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}$ bilden aber ein Kräftepaar. Demnach kann an Stelle jeder Einzelkraft beim Hebel ein Kräftepaar gesetzt werden. Das hat insofern einen Vorzug, als beim Hebel nur eine drehende Bewegung in Frage kommt, während wir schon vorher sahen, dass das Kräftepaar eine drehende Bewegung des Körpers herbeizuführen sucht.

Wir wollen jetzt die Bedingung für das Gleichgewicht von zwei äusseren Kräften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ an einem Hebel aufstellen. Ausser $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ wirkt zwar am Hebel noch der Auflagerdruck; gewöhnlich ist aber dessen Grösse und Richtung gleichgültig. Man will nur wissen, ob und wann $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ am Hebel im Gleichgewichte miteinander stehen, ohne sich um die daneben auftretende Auflagerkraft, durch die das Gleichgewicht erst zu Stande kommen kann, weiter zu kümmern. Das ist auch in der That leicht möglich. Man braucht nur die Bedingung anzuschreiben, dass die Summe der Arbeiten von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bei einer Bewegung um die Drehaxe gleich Null ist. Dann kann der Körper unter dem Einflusse von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nicht in Bewegung kommen, wenn er vorher in Ruhe war, denn wie auch die Auflagerkräfte vertheilt, wie gross sie und wie sie gerichtet sein mögen, ihre Arbeit ist bei der Drehung gleich Null. Im Falle der Schneide folgt dies daraus, dass die Angriffspunkte des Auflagerdrucks längs der Schneide vertheilt sind, also in Ruhe bleiben. Bei dem

Zapfen vertheilt sich der Auflagerdruck längs des Umfangs und die Bewegung der Punkte des Zapfenumfangs steht senkrecht zur Druckkraft, wenn diese nur in einem Normaldrucke besteht. Wenn auch Reibung am Zapfenumfange hinzukommt, leistet freilich auch der Auflagerdruck eine Arbeit bei der Drehung und die Gleichgewichtsbedingung zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ wird dadurch geändert. Da sich aber die Reibung stets nur einer Relativbewegung der Körper, zwischen denen sie auftritt, widersetzt, kann sie nicht die Ursache einer Störung des Gleichgewichts werden, das ohne ihre Dazwischenkunft schon gesichert wäre. Vielmehr wird durch das Hinzukommen der Reibung nur verhindert, dass das Gleichgewicht bereits gestört wird, wenn die Gleichgewichtsbedingung zwischen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nur nahezu erfüllt ist.

Die Arbeit einer Einzelkraft am Hebel kann, wie sich vorhin zeigte, gleich der Arbeit eines Kräftepaars gesetzt werden und für diese haben wir im vorigen Paragraphen den Ausdruck $\mathfrak{M}\mathfrak{u}\,dt$ abgeleitet. Die Richtung der Drehungsaxe ist hier von vornherein gegeben. Um das innere Product zu bilden, projiciren wir das Moment $\mathfrak{M}$ auf die Drehungsaxe und setzen nun die Arbeit für eine kleine Drehung gleich $M'udt$. Die Bedingung dafür, dass die Summe der Arbeiten der äusseren Kräfte bei einer Drehung des Hebels gleich Null sei, kommt demnach darauf hinaus, dass die Summe der Momente M' der Kräfte in Bezug auf die Drehungsaxe verschwinde. Nach § 17 ermittelt man diese Momente am bequemsten in der Art, dass man den Körper und die an ihm wirkenden Kräfte zuvor auf eine zur Drehungsaxe senkrechte Ebene projicirt, die Projection der Drehaxe zum Momentenpunkte wählt und die Momente von den Kräfteprojectionen nimmt.

Damit kommt man endlich auf das einfache Resultat

$$Pp = Qq, \tag{65}$$

worin P und Q die Projectionen der äusseren Kräfte auf die Zeichenebene, und p und q die auf ihre Richtungslinien vom

„Drehpunkte" des Hebels senkrecht gezogenen Hebelarme sind. Für den Fall, dass ausserdem noch P und Q parallel zu einander angenommen werden, spricht die vorausgehende Gleichung einen der bekanntesten Sätze der Mechanik, das „Hebelgesetz" aus, mit dem die alten Griechen schon wohl vertraut waren. — Es hätte natürlich keiner so langen Erörterung bedurft, um nur diese einfache Gleichung abzuleiten; dazu hätte es genügt, sofort eine Projection des Hebels und der an ihm wirkenden Kräfte zu zeichnen und auf die Projection den Momentensatz anzuwenden, der ebenfalls als allgemeine Gleichgewichtsbedingung bekannt ist. Die mit dem Hebel zusammenhängenden Aufgaben sind aber nicht immer von jener einfachen Art, die schon den Alten vertraut war; eine etwas ausführlichere Erörterung, die den Zusammenhang nach allen Seiten hin beleuchtet, war daher nicht zu entbehren.

Eine mit der vorigen nahe verwandte Aufgabe besteht darin, die Auflagerkräfte für einen Balken zu berechnen, der an beiden Enden gestützt ist und beliebig vertheilte Lasten trägt. Die Flächen, mit denen der Balken auf den Stützen aufliegt, sind in der Regel nicht sehr gross. Man kann sich den ganzen Auflagerdruck, der auf einer Seite übertragen wird, zu einer Einzelkraft vereinigt denken, deren Angriffspunkt irgendwo innerhalb der Auflagerfläche liegt. Dabei macht es keinen grossen Unterschied, welchen Punkt der Auflagerfläche man als Angriffspunkt wählt. Gewöhnlich nimmt man den Angriffspunkt in der Mitte der Fläche an, obschon es in der Regel wahrscheinlicher ist, dass er etwas mehr nach der von dem Balken überdeckten Oeffnung hin liegt. Die Summe beider Auflagerkräfte muss nach dem Componentensatze gleich der Summe der Lasten sein. Um eine von ihnen, etwa den Stützendruck A am linken Auflager (Abb. 33), zu berechnen,

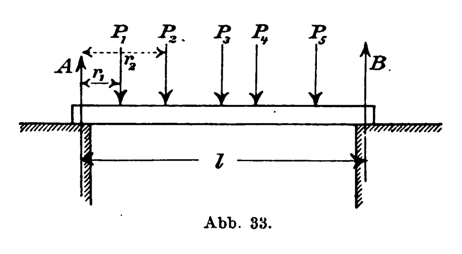


Abb. 33.

wendet man am bequemsten den Momentensatz für einen Momentenpunkt an, der auf der Richtungslinie des zweiten Stützendrucks B liegt. Wird irgend eine der Lasten mit P und ihr Abstand vom linken Auflager mit p bezeichnet, so erhält man die Momentengleichung

$$Al - \Sigma P(l - p) = 0 \text{ und hieraus } A = \Sigma P - \frac{1}{l}\Sigma Pp.$$

Der Auflagerdruck B wird ebenso zu

$$B = \frac{1}{l}\Sigma Pp$$

gefunden. — Bei dieser Betrachtung wird vorausgesetzt, dass die Enden des Balkens frei aufliegen, so nämlich, dass der kleinen elastischen Formänderung, die mit der Belastung verbunden ist und die eine geringe Drehung der Stabenden herbeizuführen sucht, kein Hinderniss im Wege steht. Bei eingespannten Stabenden muss die im dritten Bande dieser Vorlesungen auseinandergesetzte Berechnung der Auflagerdrücke angewendet werden. Jedenfalls gelten die vorhergehenden Formeln genau, wenn der Balken beiderseits auf Schneiden gelagert ist. Ferner ist noch stillschweigend vorausgesetzt worden, dass der Stützendruck senkrecht gerichtet ist, dass er also keine horizontale Componente hat. Eine solche kann z. B. sofort eintreten, wenn der Balken eine Temperaturänderung erfährt und dabei durch die Art der Befestigung am Auflager an einer Ausdehnung oder Verkürzung verhindert ist. In diesem Falle sind unter A und B nur die Verticalcomponenten der Auflagerkräfte zu verstehen. Diese selbst werden nämlich durch das Hinzutreten der Horizontalcomponenten nicht geändert, indem sich die Horizontalcomponenten an beiden Balkenenden gegenseitig im Gleichgewichte halten. Nur wenn die Stützen des Balkens verschieden hoch liegen, wie z. B. bei einer Treppenwange, werden auch die Verticalcomponenten durch das Hinzutreten horizontaler Auflagercomponenten geändert und die vorige Berechnung bleibt dann nicht mehr anwendbar. Bei grossen Balken, z. B. bei Brückenträgern, pflegt man nur das eine Ende des Balkens unverschieblich

aufzulegen, das andere aber auf ein Gleitlager oder Rollenlager zu setzen, damit sich der Balken frei ausdehnen und zusammenziehen kann. Horizontale Auflagercomponenten von merklicher Grösse sind dann ausgeschlossen.

Schliesslich möge noch zur Erklärung von Abb. 33 bemerkt werden, dass der Druck auf die Stütze selbstverständlich nach abwärts gerichtet ist. Die Auflagerkräfte A und B sind aber mit nach oben gerichtetem Pfeile eingetragen worden, weil sie als Kräfte an dem Balken und nicht als Kräfte an der Stütze in Betracht kamen. Der von der Stütze auf den Balken übertragene Druck hat nach dem Wechselwirkungsgesetze die entgegengesetzte Richtung wie der Druck auf die Stütze.

Auch die Auflagerkräfte der in Abb. 34 gezeichneten Platte, die auf drei nicht in gerader Linie liegenden Stützen gelagert ist und irgend eine Last P (oder auch mehrere) trägt, können leicht in ähnlicher Art berechnet werden. Man projicire die Platte auf eine verticale Ebene, so dass sich zwei Stützen in der Zeichnung decken. Dann lege man den Momentenpunkt auf die gemeinsame Richtungslinie von A und B im Aufrisse und schreibe die Momentengleichung an, aus der

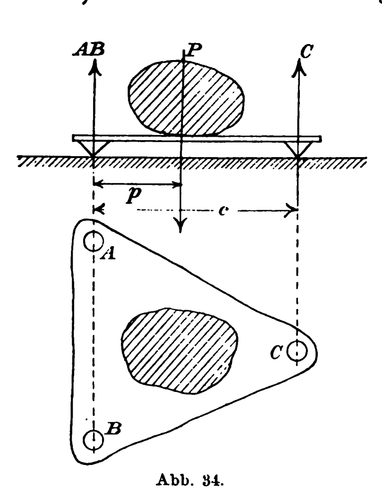


Abb. 34.

$$C = \frac{Pp}{c}$$

folgt. Die anderen beiden Auflagerkräfte können in derselben Weise gefunden werden. — Anstatt dessen kann man auch die Momentengleichung für die Axe AB bilden. Man hat dann nicht nöthig, vorher einen Aufriss des Körpers und der an ihm wirkenden Kräfte zu zeichnen. Im Uebrigen kommt dieses Verfahren aber auf dasselbe hinaus, denn am besten macht man sich stets klar, wie gross das Moment einer Kraft

für eine Axe ist, indem man die Axe und die Kraft auf eine zur ersten senkrechte Ebene projicirt und das Moment der Kraftprojection von dem Punkte aus nimmt, nach dem sich die Axe projicirt.

Wenn mehr Stützen vorhanden sind, können die Auflagerkräfte beim Balken wie bei der Platte nicht mehr nach den Lehren der Mechanik starrer Körper berechnet werden. Man nennt eine Aufgabe dieser Art statisch unbestimmt. Sie kann nur mit Hülfe der Elasticitätstheorie gelöst werden; im dritten Bande dieser Vorlesungen sind solche Fälle ausführlich erörtert.

Aufgaben.

10. *Aufgabe, Eine Scheibe dreht sich um eine feste Axe. Auf der Scheibe ist ein Rad angebracht, das sich um eine zur ersten parallele Axe mit derselben Geschwindigkeit, aber im entgegengesetzten Sinne dreht. Man soll die absolute Bewegung des Rades ermitteln.*

Lösung. In jedem Augenblicke führt das Rad zwei Bewegungen zugleich aus, die eine mit der Scheibe, die andere relativ zur Scheibe. Als Bezugspunkt wähle man den Mittelpunkt des Rades. Bei diesem kommt nur die erste Bewegung zur Geltung; der Mittelpunkt beschreibt also eine kreisförmige Bahn. Von der Bewegung der Scheibe kommt ausser dieser Translation noch eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ um eine durch den Bezugspunkt gezogene Axe in Betracht. Diese haben wir zusammenzusetzen mit der Drehung $-\mathfrak{u}$, die das Rad relativ zur Scheibe ausführt. Die resultirende Drehung ist daher Null; die absolute Bewegung des Rades besteht daher in einer kreisförmigen Translation.

11. *Aufgabe. Ein Eisenbahnwagen durchläuft eine im Gefälle liegende Curve; man soll die Momentanaxe der Bewegung angeben.*

Lösung. Der Wagen führt eine Schraubenbewegung aus Die Schraubenaxe steht vertical und geht durch den Krümmungsmittelpunkt der im Grundrisse gezeichneten Curve.

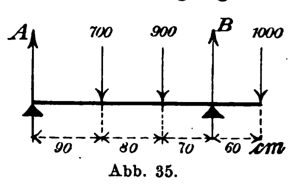


Abb. 35.

12. *Aufgabe. Ein auf 2 Stützen aufliegender Stab trägt die in Abb. 35 angegebenen Lasten; man soll die Auflagerdrücke berechnen.*

Lösung. Für den linken Stützpunkt als Momentenpunkt erhält man die Momentengleichung

$$B \cdot 240 = 700 \cdot 90 + 900 \cdot 170 + 1000 \cdot 300$$

und hieraus $B = 2150$. Subtrahirt man B von der Summe der Lasten, so folgt $A = 450$ kg. Wenn die Last von 1000 kg weiter nach rechts gerückt würde, könnte B grösser als die Summe der Lasten werden. Der Auflagerdruck A ist dann negativ; wenn der Balken am linken Ende nicht fest geschraubt ist, tritt in diesem Falle ein Kippen um den rechten Stützpunkt ein.

13. Aufgabe. Eine rechteckige Fallthür ist an einer schräg liegenden Axe AA aufgehängt. Man soll berechnen, wie gross eine in der Mitte der Gegenseite bei B in Abb. 36 angreifende horizontale Kraft H sein muss, um die Thür so weit zu heben, dass sie mit der ursprünglichen Lage einen Winkel β bildet.

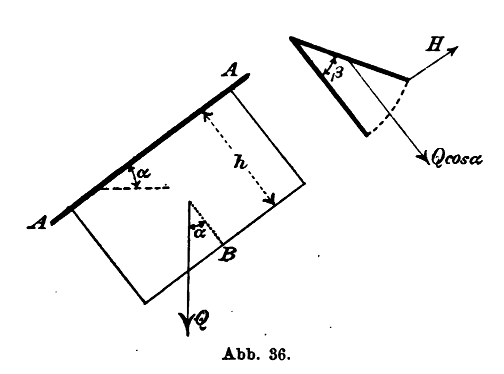


Abb. 36.

Lösung. Das Gewicht Q der Fallthür können wir uns in der Mitte concentrirt denken. Für AA als Momentenaxe muss das Moment von H in der Lage β gleich dem Momente von Q sein. Um die Momente bequem berechnen zu können, denken wir uns die Thür mit den daran angreifenden Kräften auf eine zu AA senkrechte Ebene projicirt, wie es in Abb. 36 seitlich angegeben ist. H projicirt sich in wahrer Grösse und der Hebelarm ist $h \cos \beta$. Dagegen bildet Q den Winkel α mit der Projectionsebene; die Projection ist daher gleich $Q \cos \alpha$ und der Hebelarm ist $\frac{1}{2} h \sin \beta$. Die Momentengleichung lautet daher

$$Hh \cos \beta = Q \cos \alpha \cdot \frac{1}{2} h \sin \beta$$

und hieraus

$$H = \frac{1}{2} Q \cos \alpha \operatorname{tg} \beta .$$

14. Aufgabe. Eine Stange, die ein Gewicht Q trägt, ist an drei Seiten A, B, C aufgehängt (Abb. 37); man soll die Seilspannungen berechnen.

Lösung. An der Stange halten sich 4 Kräfte im Gleichgewichte, deren Richtungslinien sämmtlich gegeben sind. Für jeden

Punkt der Ebene muss die Momentensumme gleich Null sein. Bei beliebiger Wahl des Momentenpunktes kommen drei Unbekannte in der Momentengleichung vor, nämlich die Spannungen A, B, C. Legt man aber den Momentenpunkt auf den Schnittpunkt von zwei Richtungslinien, so fallen zwei Unbekannte weg und die Gleichung lässt sich sofort nach der dritten auflösen. So hat man für Punkt O in Abb. 37 die Gleichung $A\,a = Q\,q$ und hieraus $A = \frac{Qq}{a}$. Aehnlich finden sich die anderen Seilspannungen. Man kann diese aber auch, nachdem die erste bekannt ist, durch Zeichnen eines Kräftepolygons erhalten, denn die geometrische Summe aller an dem Stabe angreifenden Kräfte muss gleich Null sein.

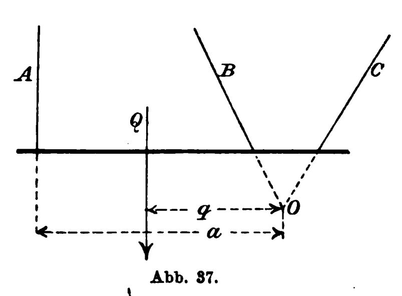


Abb. 37.

Die Lösung versagt, wenn die drei Seile A, B, C parallel zu einander sind. In diesem Falle ist die Aufgabe statisch unbestimmt, grade so wie die früher erwähnte Aufgabe, die Auflagerkräfte eines über zwei Oeffnungen reichenden Balkens zu berechnen.

15. *Aufgabe. Eine Stange ist an den Enden mit Rollen versehen, um die Reibung zu vermeiden, und sie stützt sich gegen eine glatte Wand und gegen den glatten Fussboden (Abb. 38). In der Mitte trägt sie eine Last Q, in die das Eigengewicht mit eingerechnet ist. Um das Abgleiten zu verhüten, ist das Seil A angebracht; man soll dessen Spannung berechnen.*

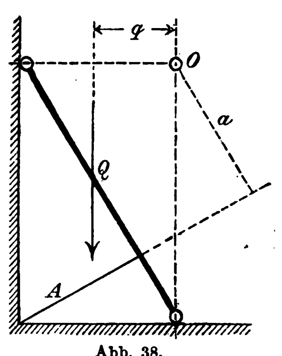


Abb. 38.

Lösung. Der Auflagerdruck, den die Stange an jedem Ende durch Vermittelung der Rollen aufnimmt, kann, da die Reibung ausgeschlossen sein soll, nur senkrecht zur Wand oder zum Fussboden stehen. Auch von der Kraft, die das Seil auf die Stange überträgt, kennt man von vornherein die Richtungslinie. Man hat also wie bei der vorigen Aufgabe das Gleichgewicht von vier Kräften zu untersuchen, von denen die Richtungslinien sämmtlich bekannt sind, während nur von einer die Grösse gegeben ist. Man verfährt daher auch wie bei der Lösung der

vorigen Aufgabe, indem man den Schnittpunkt O von zwei Richtungslinien (siehe Abb. 38) als Momentenpunkt wählt. Damit findet man $Aa = Qq$ und hieraus A.

Auch hier ist ein Ausnahmefall zu erwähnen. Er tritt ein, wenn die Richtungslinie des Seiles A durch O geht, d. h. wenn sich alle drei der Grösse nach unbekannten Kräfte in einem Punkte schneiden. Schon dann, wenn A nahe an O vorbei geht, wird die Seilspannung gross, weil ihr Hebelarm a klein ist. Wird a sehr klein, so wird A sehr gross, d. h. das Seil reisst ab. Geht A oberhalb von O vorbei, so kann es ein Abgleiten der Stange überhaupt nicht verhüten, denn dazu müsste A eine Druckkraft, das Seil also durch eine auf Druck widerstandsfähige Stange ersetzt sein. Ein Seil endlich, das durch O geht, trifft die Stange in der Mitte. Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt aber, dass die Mitte der Stange beim Abgleiten einen Kreisbogen beschreibt, dessen Mittelpunkt mit dem Scheitel des rechten Winkels zwischen Wand und Fussboden zusammenfällt und dessen Halbmesser daher das Seil A bildet. Man erkennt daraus, dass das Seil in diesem Ausnahmefalle ebenso wie eine an dessen Stelle gesetzte Stange das Abgleiten überhaupt nicht zu verhüten vermag.

Dritter Abschnitt.

Die Lehre vom Schwerpunkte.

---

§ 24. Definition des Schwerpunktes.

Gegeben sei ein beliebig zusammengesetzter Punkthaufen, dessen Punkte durch Ordnungsnummern von einander unterschieden sein mögen. Wir wählen einen beliebigen Anfangspunkt aus, von dem wir nach jedem Punkte des Haufens einen Radiusvector ziehen. Der Radiusvector nach dem ersten Punkte sei mit $\mathfrak{r}_1$ und die ihm zugeschriebene Masse mit m_1 bezeichnet. Dann multipliciren wir jedes $\mathfrak{r}$ mit dem zugehörigen m, nehmen von den Producten die geometrische Summe und dividiren sie durch die Summe der Massen. Wir erhalten dadurch einen neuen Radiusvector, den wir mit $\mathfrak{s}$ bezeichnen wollen, also

$$\mathfrak{s} = \frac{m_1 \mathfrak{r}_1 + m_2 \mathfrak{r}_2 + m_3 \mathfrak{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\Sigma m \mathfrak{r}}{\Sigma m}. \qquad (66)$$

Das Verfahren, das wir zur Ableitung von $\mathfrak{s}$ eingeschlagen haben, ist allgemein gebräuchlich, um einen Durchschnittswerth zu ermitteln. Hätten wir die Abstände der einzelnen Massen nur ihrer Grösse nach, ohne Berücksichtigung der Richtung genommen, also auch die Summirung nicht geometrisch, sondern numerisch vorgenommen, so hätten wir durch die vorausgehende Rechnung das arithmetische Mittel der Massenabstände vom Anfangspunkte erhalten. Aber auch nach Gl. (66) erhalten wir einen Durchschnittswerth, der analog als das geometrische Mittel der Massenabstände bezeichnet werden könnte. Da man aber in der Planimetrie

einen anderen Begriff unter der Bezeichnung des geometrischen Mittels versteht, wollen wir $\mathfrak{s}$ das graphische Mittel aus den Massenabständen nennen.

Wenn $\mathfrak{s}$ vom Anfangspunkte O aus abgetragen wird, gelangen wir zu einem Punkte S (siehe Ab. 39), in dem wir uns die gesammte Masse des Haufens vereinigt denken könnten, ohne dass dadurch $\Sigma m\mathfrak{r}$ geändert würde. Um dies deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir Gl. (66) noch in der Form

$$M\mathfrak{s} = \Sigma m\mathfrak{r} \qquad (67)$$

schreiben, in der jetzt M die Masse des ganzen Haufens, also $M = \Sigma m$ bedeutet.

Der in dieser Weise bestimmte Punkt S heisst der Schwerpunkt des Punkthaufens. Dass er mit Recht eine Benennung verdient, bei der auf die Wahl des Anfangspunktes, dessen wir uns zu seiner Ermittelung bedienten, gar nicht Bezug genommen wird, muss allerdings erst noch bewiesen werden. Zunächst wäre nämlich zu vermuthen, dass man für jede andere Wahl des Anfangspunktes zu einem anderen Punkte S gelangen könne. Um dies zu untersuchen, wählen wir in Abb. 39 ausser dem zuerst angenommenen Anfangspunkte O noch irgend einen anderen Anfangspunkt O'. Die unregelmässig gezogene geschlossene Linie in Abb. 39 soll den Umriss des Punkthaufens angeben und m sei die Masse irgend eines dazugehörigen Punktes. Die Radienvectoren von O aus bezeichnen wir mit $\mathfrak{r}$, die von O' aus mit $\mathfrak{r}'$. Einer der Anangspunkte oder beide können übrigens auch in den Umriss des Punkthaufens hinein fallen. Für das graphische Mittel $\mathfrak{s}$ der Massenabstände von O aus gilt zunächst Gl. (66). Wir

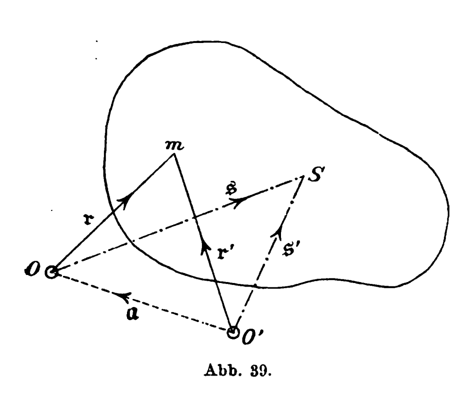


Abb. 39.

bilden nun auch das graphische Mittel $\mathfrak{s}'$ der von O' aus gezählten Radienvectoren. Hierbei beachten wir, dass

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{a} + \mathfrak{r}$$

ist, wenn mit $\mathfrak{a}$ der Radiusvector von O' nach O bezeichnet wird. Wir erhalten daher

$$\mathfrak{s}' = \frac{\Sigma m \mathfrak{r}'}{\Sigma m} = \frac{\Sigma m(\mathfrak{a}+\mathfrak{r})}{\Sigma m} = \frac{\Sigma m \mathfrak{a} + \Sigma m \mathfrak{r}}{\Sigma m} = \mathfrak{a} + \mathfrak{s}. \qquad (68)$$

Bei Ausführung der Division mit Σm ist nämlich zu berücksichtigen, dass $\mathfrak{a}$ constant ist und dass daher für $\Sigma m \mathfrak{a}$ auch $\mathfrak{a} \Sigma m$ geschrieben werden kann, sowie dass $\Sigma m \mathfrak{r}$ bei Division mit Σm nach Gl. (66) $\mathfrak{s}$ liefert.

Hatten wir also $\mathfrak{s}$ von O aus abgetragen und waren dadurch zum Punkte S gelangt, so finden wir $\mathfrak{s}'$ als dritte Seite des Dreiecks, in dem die beiden anderen Seiten durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}$ gebildet werden. Die Verbindungsstrecke $O'S$ gibt also sofort $\mathfrak{s}'$ an, d. h. wir gelangen stets zu demselben Punkte S, von welchem Anfangspunkte aus wir auch das graphische Mittel der Massenabstände abtragen mögen. Damit ist der vermisste Nachweis geliefert und wir erkennen, dass die Lage von S nur durch die Gestalt des Punkthaufens und durch die Massenvertheilung in ihm bedingt ist und dass es ganz gleichgültig ist, von welchem Anfangspunkte wir zur Ermittelung von S ausgehen.

Dieselbe Betrachtung bleibt auch noch gültig, wenn wir O' mit S zusammenfallen lassen. Dann wird $\mathfrak{a} = -\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{s}'$ wird zu Null. Demnach ist

$$\Sigma m \mathfrak{r} = 0 \qquad (69)$$

die nothwendige und zugleich die hinreichende Bedingung dafür, dass der Anfangspunkt, von dem wir in dieser Gleichung die Radienvectoren $\mathfrak{r}$ rechnen, mit dem Schwerpunkte zusammenfällt.

Kaum eine andere Betrachtung führt so ganz von selbst zum Gebrauche des Rechnens mit gerichteten Grössen und vor Allem zum Begriffe der geometrischen Summe als die Lehre vom Schwerpunkte. In der That hat auch auf diesem Gebiete

die Benützung von Vectoren in der Rechnung ihren ersten Anfang genommen. Das berühmte Werk von Möbius „Der barycentrische Calcül“ bildete den ersten Schritt auf diesem Wege, der sich seitdem so nützlich für die ganze Behandlung der Mechanik erwiesen hat.

Zunächst leite ich noch einige einfache Folgerungen aus den vorhergehenden Betrachtungen ab. Angenommen, der ganze Punkthaufen sei in mehrere Gruppen eingetheilt, deren Massen mit M_1, M_2 u. s. f. bezeichnet werden. Dann gilt für jeden Anfangspunkt die Gleichung

$$M\mathfrak{s} = \Sigma_1 m\mathfrak{r} + \Sigma_2 m\mathfrak{r} + \cdots = M_1\mathfrak{s}_1 + M_2\mathfrak{s}_2 + \cdots,$$

wenn mit Σ_1 eine über die zur ersten Gruppe gehörigen Punkte ausgedehnte Summirung und unter $\mathfrak{s}_1$ der Radiusvector des zugehörigen Gruppenschwerpunktes bezeichnet wird und entsprechend bei den anderen Gruppen. Die Gleichung lehrt uns, dass wir den Schwerpunkt des ganzen Haufens auch dadurch finden können, dass wir zunächst den Schwerpunkt jeder einzelnen Gruppe aufsuchen, uns dann die ganze Masse jeder Gruppe in ihrem Schwerpunkte vereinigt denken und hierauf den Schwerpunkt der so bestimmten Massenpunkte aufsuchen.

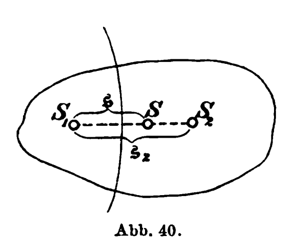


Abb. 40.

Auf diese Art verfährt man in der That sehr häufig, um den Schwerpunkt einer complicirteren Massenvertheilung zu ermitteln, die sich in mehrere einfache Theile zerlegen lässt. — Besonders zu erwähnen ist noch der Fall, dass der ganze Haufen in nur zwei Gruppen zerlegt ist. Die Gruppenschwerpunkte seien mit S_1 und S_2 (Abb. 40) bezeichnet. Man wähle S_1 als Anfangspunkt, dann ist

$$M\mathfrak{s} = M_2\mathfrak{s}_2,$$

denn $\mathfrak{s}_1$ verschwindet. Hiernach ist $\mathfrak{s}$ gleichgerichtet mit $\mathfrak{s}_2$. Der Schwerpunkt des ganzen Haufens fällt also auf die grade Verbindungslinie beider Theilschwerpunkte. Er theilt den Ab-

stand zwischen beiden im umgekehrten Verhältnisse der Massen beider Gruppen.

Eine andere einfache und häufig mit Nutzen verwendbare Folgerung erhält man durch Parallelprojection des Punkthaufens auf irgend eine Ebene (vgl. Abb. 41). Dabei denken wir uns die Massen mit projicirt, so nämlich, dass der Projection jedes materiellen Punktes dieselbe Masse zugeschrieben wird, wie dem Punkte im Raume. Da sich

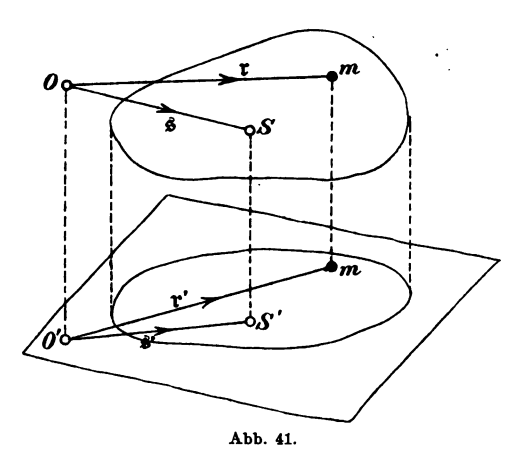


Abb. 41.

ein geschlossenes Polygon stets wieder als geschlossenes Polygon projicirt, besteht auch zwischen den Projectionen $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{s}'$ der Radienvectoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ die Beziehung

$$M\mathfrak{s}' = \Sigma m\mathfrak{r}',$$

und diese Gleichung sagt aus, dass der Schwerpunkt S' der ebenen Massenvertheilung in der Projectionsebene durch die Projection des Schwerpunktes des Punkthaufens im Raume gebildet wird. Man drückt dies am einfachsten durch den Satz aus, dass sich bei der Parallelprojection der Schwerpunkt mit projicirt.

Hierzu erwähne ich noch, dass man häufig von dem Schwerpunkte einer Linie oder einer Fläche oder eines Raumes redet, ohne eine bestimmte Massenvertheilung anzugeben, zu der dieser Schwerpunkt gehören soll. Man hat dies dann immer so zu verstehen, dass die Masse gleichmässig über diese Gebilde vertheilt gedacht werden soll. Hat man nun z. B. den Schwerpunkt eines Kreissegmentes bereits ermittelt, so kann man nach dem eben bewiesenen Satze sofort auch den Schwerpunkt des Ellipsensegmentes angeben, das durch

Parallelprojection aus dem Kreissegmente erhalten werden kann. Jede Flächeneinheit des Kreissegments ist nämlich mit gleich viel Masse belegt zu denken. Projicirt man nun die Massen, so sind diese in der Projection dichter zusammengedrängt, denn die Flächeneinheit im Raume ergibt eine Projection, die gleich dem Cosinus des Neigungswinkels zwischen der Kreisebene und der Projectionsebene ist. Der Neigungswinkel ist aber hier überall derselbe und daher ist auch die Fläche des Ellipsensegmentes nach der Projection der Massen noch überall gleichförmig mit Masse belegt. Die Projection des Schwerpunktes des Kreissegments fällt also in der That mit dem Schwerpunkte des Ellipsensegments zusammen. Dasselbe gilt auch für die Projection jeder beliebigen ebenen Figur.

Dagegen ist der Satz nicht verwendbar, um etwa den Schwerpunkt des Ellipsenbogens aus dem Schwerpunkte des Kreisbogens abzuleiten. Die Projection des Kreisbogenschwerpunktes ist zwar immer noch der Schwerpunkt einer Massenvertheilung auf dem Ellipsenbogen. Diese Massenvertheilung ist aber nicht mehr gleichförmig, weil der Neigungswinkel der verschiedenen Bogenelemente des Kreises zur Projectionsebene verschieden ist. Der Ellipsenbogen wird durch die Projection der Massen dort am dichtesten mit Masse belegt, wo jener Neigungswinkel am grössten ist. Da man nun unter dem Schwerpunkte des Ellipsenbogens, wenn jede nähere Angabe über die Massenvertheilung weggelassen wird, immer den zu einer über die ganze Länge gleichförmigen Massenvertheilung gehörigen Schwerpunkt versteht, so kann dieser aus dem Kreisbogenschwerpunkte durch Projection nicht gefunden werden.

Aehnlich ist es auch bei der Projection krummer Oberflächen oder bei der Projection von Körpern. Die Anwendbarkeit des Satzes ist daher im Wesentlichen auf die Schwerpunktsermittelung von ebenen Figuren beschränkt.

Mit den Schwerpunkten ebener Figuren hat man sehr häufig zu thun. Dabei ist es oft zweckmässig, die der Definition des Schwerpunktes zu Grunde gelegte Gleichung durch eine andere zu ersetzen, die durch eine einfache Betrachtung

aus ihr folgt. In Abb. 42 sei O der Anfangspunkt und S der Schwerpunkt der Figur. Dann hat man zunächst

$$M\mathfrak{s} = \Sigma m\mathfrak{r}.$$

Nun ziehe man zwei Axen OX und OY durch O, die der Einfachheit wegen rechtwinklig zu einander angenommen werden sollen. Man kann nämlich die Betrachtung grade so auch für schiefwinklige Axen durchführen, hat aber davon keinen besonderen Gewinn. Projicirt man alle Vectoren in der vorausgehenden Gleichung auf die Axe OX, so wird

Abb. 42.

$$Ms = \Sigma mx. \tag{70}$$

Die Projectionen x und s sind zugleich die Abstände der zugehörigen Massen m von der Axe OY. Man kann jetzt die Axe OX wieder fortlöschen, da sie nur zum Beweise und nicht zur praktischen Anwendung des durch Gl. (70) ausgesprochenen Satzes nöthig ist. Dieser Satz hat ganz dieselbe Form wie Gl. (67); an die Stelle der Radienvectoren von einem Anfangspunkte sind jetzt nur die senkrechten Abstände von einer beliebig gewählten Axe getreten.

Soll die Axe durch den Schwerpunkt gehen, so muss

$$\Sigma mx = 0 \tag{71}$$

sein. Eine solche Axe wird eine Schwerlinie der Figur (oder überhaupt des Punkthaufens) genannt und Gl. (71) ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine gegebene Axe eine Schwerlinie bildet.

Der Schwerpunkt der Figur bezieht sich, wie bereits angegeben, auf eine gleichförmige Massenvertheilung über die ganze Fläche. Jedes m ist daher dem Flächenelemente dF proportional, zu dem es gehört. Ersetzt man noch das Summen-

zeichen durch ein Integralzeichen, um anzudeuten, dass es sich um eine Summirung unendlich vieler und unendlich kleiner Glieder handelt, so kann Gl. (71) auch in der Form

$$\int x dF = 0 \qquad (72)$$

angeschrieben werden.

Eine mit der vorausgehenden sehr nahe verwandte Betrachtung lässt sich an Abb. 43 anknüpfen. In dieser sei S der Schwerpunkt eines beliebigen, dreifach ausgedehnten Punkthaufens und α eine beliebig gewählte Ebene. Dann gilt auch hier stets die Gleichung

$$Ms = \Sigma mx \qquad (73)$$

zwischen den Abständen x und s von der Ebene α. Zum Beweise wähle man irgend einen Punkt in der Ebene α als Anfangspunkt und projicire die Vectoren $m\mathfrak{r}$ und $M\mathfrak{s}$ auf eine zu α senkrechte Axe, die in der Abbildung weggelassen wurde, weil es bei der Anwendung der Gleichung nicht auf sie ankommt. Wenn zwei gerichtete Grössen einander gleich sein sollen, müssen auch ihre Projectionen auf jede beliebige Axe gleich sein. Die Projectionen der Radienvectoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ auf die erwähnte Axe liefern aber die Abstände x und s von der Ebene α. — Wenn die Ebene α den Haufen durchschneidet, müssen selbstverständlich die nach verschiedenen Seiten der Ebene liegenden Abstände mit entgegengesetzten Vorzeichen in die Gleichung eingeführt werden. Soll die Ebene durch den Schwerpunkt S gehen, so gilt auch hierfür die nothwendige und hinreichende Bedingung

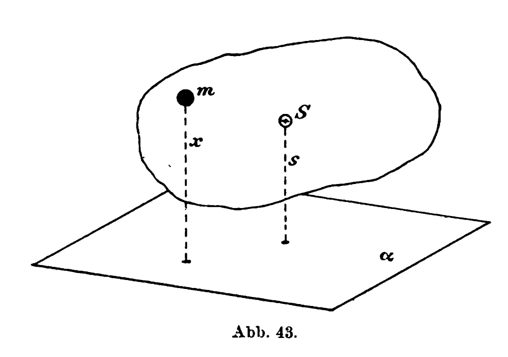


Abb. 43.

$$\Sigma mx = 0. \qquad (74)$$

§ 25. Der Schwerpunkt als Mittelpunkt paralleler Kräfte.

An jedem Punkte des Haufens denke man sich eine Kraft angebracht, die der Masse des Punktes proportional ist. Alle diese Kräfte seien gleich gerichtet. Wie wir früher sahen, kann man zwei gleichgerichtete Kräfte an dem als starr betrachteten Punkthaufen immer durch eine Resultirende ersetzen, die mit diesen ebenfalls gleich gerichtet ist und deren Richtungslinie zwischen die Richtungslinien der gegebenen Kräfte fällt. Durch Wiederholung des Verfahrens kann man beliebig viele parallele und gleich gerichtete Kräfte zu einer Resultirenden vereinigen. Wir wollen uns diese Zusammensetzung mit den an dem Punkthaufen angebrachten Kräften vorgenommen denken. Dann lässt sich beweisen, dass die Resultirende stets durch den Schwerpunkt des Punkthaufens geht, welche Richtung man auch für die parallelen Kräfte wählen möge.

Kräfte, die den Massen proportional sind, ertheilen allen Punkten des Haufens die gleiche Beschleunigung. Bezeichnen wir die Beschleunigung sowohl der Grösse als der Richtung nach mit $\mathfrak{g}$, so kann die an dem ersten Punkte des Haufens angebrachte Kraft $\mathfrak{P}_1$

$$\mathfrak{P}_1 = m_1 \mathfrak{g}$$

gesetzt werden und ähnlich für die übrigen Punkte. Um nun zu beweisen, dass die Resultirende aller $\mathfrak{P}$ durch den Schwerpunkt des Punkthaufens gehen muss, wähle ich den Schwerpunkt als Momentenpunkt und wende den Satz an, dass das Moment der Resultirenden jedenfalls gleich der geometrischen Summe der Momente aller $\mathfrak{P}$ ist. Die vom Schwerpunkte nach den einzelnen materiellen Punkten gezogenen Radienvectoren bezeichne ich mit $\mathfrak{r}_1$ u. s. f. Dann erhalte ich für die genannte Momentensumme

$$\Sigma V \mathfrak{P} \mathfrak{r},$$

wobei sich die geometrische Summirung über alle Punkte des Haufens zu erstrecken hat. Setzt man hier den Werth von $\mathfrak{P}$ ein, so wird daraus

$$\Sigma V m \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{r}.$$

Der Factor m in dem geometrischen Producte ist richtungslos; es ist daher gleichgültig, ob ich $\mathfrak{g}$ oder $\mathfrak{r}$ mit diesem Factor zusammenfasse. Ich kann daher für den vorausgehenden Ausdruck auch

$$\Sigma V \mathfrak{g} \cdot m \mathfrak{r}$$

schreiben. In dieser Summe von geometrischen Producten enthält aber jedes Glied den constanten Factor $\mathfrak{g}$. Nach dem Satze, dass eine geometrische Summe mit einer gerichteten Grösse auf äussere Art multiplicirt wird, indem man jedes Glied damit multiplicirt, kann daher der constante Factor $\mathfrak{g}$ vor eine Klammer gesetzt werden, während in die Klammer die geometrische Summe der anderen Factoren kommt. Die Stelle der Klammer vertritt bei unserer Schreibweise schon das Summenzeichen. Nach dieser Umformung geht daher der vorige Ausdruck über in

$$V \mathfrak{g} \cdot \Sigma m \mathfrak{r}.$$

Nun war aber der Anfangspunkt, von dem die Radienvectoren $\mathfrak{r}$ gezogen wurden, der Schwerpunkt, und nach der im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Eigenschaft des Schwerpunktes, Gl. (69), ist

$$\Sigma m \mathfrak{r} = 0.$$

Demnach wird auch das vorausgehende Product zu Null und wir finden schliesslich

$$\Sigma V \mathfrak{P} \mathfrak{r} = 0.$$

Ebenso gross, also auch gleich Null, ist aber auch das Moment der Resultirenden aller $\mathfrak{P}$. Da nun die $\mathfrak{P}$ alle gleich gerichtet waren, ist die Grösse der Resultirenden gleich der Summe aller Absolutwerthe der $\mathfrak{P}$, also jedenfalls von Null verschieden. Das Moment der Resultirenden kann daher nur dadurch zu Null werden, dass der Momentenpunkt auf ihrer Richtungslinie liegt, womit die Behauptung des Satzes bewiesen ist.

Parallele Kräfte, die den Massen der Punkte proportional sind, sind vor allem die Gewichte der Punkte. Die Resul-

tirende aus allen Einzelgewichten eines Körpers geht also bei jeder Lage, die man dem Körper gegen die Erde geben mag, durch den Schwerpunkt des Körpers. Das ist eine der wichtigsten Eigenschaften des Schwerpunktes, von der er auch seinen Namen erhalten hat. Nach der Art, wie der Schwerpunkt im vorigen Paragraphen definirt wurde, hätte nämlich zunächst gar keine Veranlassung vorgelegen, ihm diese Bezeichnung zu geben; es hätte viel näher gelegen, ihn den Massenmittelpunkt zu nennen. Jene Betrachtungen waren ja in der That von rein geometrischer Art; sie bilden einen Bestandtheil der sogenannten „Geometrie der Massen", deren Betrachtungen an sich nur in lockerem Zusammenhange mit der eigentlichen Mechanik stehen. Der hierbei gefundene Massenmittelpunkt hat aber eine Reihe von Eigenschaften, die ihn zugleich zu einem der wichtigsten Begriffe der Mechanik erheben. Desshalb wurde gleich von Anfang an der Name „Schwerpunkt" für ihn eingeführt. Es ist aber gut, wenn man stets in Erinnerung behält, dass die ursprüngliche Definition des Schwerpunktes, aus der alle übrigen Eigenschaften folgen, die eines Mittelpunktes der gegebenen Massen ist.

In der Mechanik der starren Körper, bei der es immer zulässig ist, irgendwie vertheilte Kräfte durch ihre Resultirende — falls eine solche besteht — zu ersetzen, kann man nach dem eben bewiesenen Satze das Gewicht des Körpers stets als eine Einzelkraft behandeln, die durch den Schwerpunkt geht. In Folge dessen wird sehr häufig der Schwerpunkt geradezu als der Angriffspunkt des Gewichtes bezeichnet. So lange es nicht auf die Vertheilung der inneren Kräfte im Körper ankommt, ist diese Auffassung auch ganz unbedenklich. Ganz genau ist sie aber nicht, denn wie ich schon früher hervorhob, verliert bei einer Resultirenden von Kräften, die an verschiedenen Punkten eines Körpers angreifen, der Angriffspunkt überhaupt seine ursprüngliche physikalische Bedeutung. Bei der Resultirenden kommt es nur noch auf ihre Grösse, ihre Richtung und die Lage ihrer Richtungslinie an,

während die Wahl des Angriffspunktes auf der Richtungslinie ganz willkürlich bleibt.

Immerhin ist es aber sehr bemerkenswerth, dass die Richtungslinien der Resultirenden der parallelen Kräfte, in welcher Richtung man diese Kräfte auch wirken lassen möge, stets durch denselben Punkt gehen. Es ist daher wünschenswerth, eine Bezeichnung für diesen Punkt zu besitzen, die diesen wichtigen Umstand deutlich zum Ausdrucke bringt. Man nennt ihn daher den *Mittelpunkt der parallelen Kräfte*. Mit dem Schwerpunkte fällt dieser Mittelpunkt übrigens nur dann zusammen, wenn in der That alle Kräfte den Massen, an denen sie angebracht sind, proportional sind. Man sieht nämlich leicht ein, dass die vorausgehenden Betrachtungen auch dann anwendbar bleiben, wenn die parallelen Kräfte nach Grösse und Lage ganz beliebig vertheilt sind. Um diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen, ist es nur nöthig, dem Angriffspunkte von jeder der parallelen Kräfte eine Masse willkürlich zuzuschreiben, die deren Grösse proportional ist. Der Mittelpunkt der parallelen Kräfte fällt dann mit dem Schwerpunkte dieser gedachten Massenvertheilung zusammen. Denkt man sich nun alle Kräfte um ihre Angriffspunkte irgendwie gedreht, aber so, dass sie stets parallel zu einander bleiben und auch ihre anfängliche Grösse behalten, so dreht sich ihre Resultirende um den Mittelpunkt.

§ 26. Ermittelung des Schwerpunktes.

Die allgemeinen Untersuchungen der vorausgehenden Par graphen geben uns schon die Mittel zur Hand, um den Schwe punkt in einem gegebenen Falle wirklich aufzusuchen. Hi soll aber noch näher besprochen werden, wie man dies praktis am bequemsten ausführt.

Zunächst kann man den Schwerpunkt eines gegeben Körpers durch einen Versuch ermitteln, indem man den Körp an einem biegsamen Faden frei schwebend aufhängt. D Körper ist dann unter zwei Kräften, nämlich dem Gewich

und der Fadenspannung, die an ihm angreifen, im Gleichgewichte. Zwei Kräfte können sich aber, wie wir früher fanden, nur dann im Gleichgewichte halten, wenn ihre Richtungslinien in dieselbe Grade fallen. Verlängert man also die Richtungslinie des Fadens durch den Körper, so geht sie durch den Schwerpunkt, und nach einer Wiederholung des Versuchs mit einer zweiten Aufhängung erhält man den Schwerpunkt als Schnittpunkt der beiden Schwerlinien.

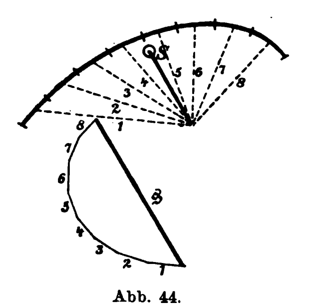


Abb. 44.

Um den Schwerpunkt einer krummen Linie (Abb. 44) zu finden, die in einer Zeichnung beliebig gegeben ist, theilt man sie in eine Anzahl Abschnitte, die hinreichend klein sind, um sie als grad betrachten zu können, wählt irgend einen Anfangspunkt und zieht die Radienvectoren nach den Mitten der Abschnitte. Am bequemsten ist es, wenn man die Abschnitte alle von gleicher Grösse wählt. Dann ist der Factor m in den Producten $m\mathfrak{r}$ constant und man kann ihn gleich der Einheit setzen. Man braucht dann nur die geometrische Summe der Radienvectoren in einem nebenan gezeichneten Summationspolygone zu bilden. Die Schlussseite dieses Polygons dividirt durch die Anzahl der Abschnitte liefert den Radiusvector $\mathfrak{s}$ des Schwerpunktes. Wenn wir diesen von O aus abtragen, erhalten wir sofort den Schwerpunkt S. Wenn die Anzahl der Abschnitte, in die man die krumme Linie getheilt hatte, ziemlich gross war, ist es zweckmässiger, die Radienvectoren in dem Summationspolygone von vornherein nur mit einem Bruchtheile ihrer wahren Länge aufzutragen, damit die Figur nicht unbequem gross wird. Dieses Verfahren ist gewöhnlich sehr schnell und bequem auszuführen und erfordert zur Erzielung einer genügenden Genauigkeit meist nur eine Eintheilung in wenige Abschnitte.

Noch etwas weiter durchführen lässt sich das Verfahren für den Fall, dass die krumme Linie AB ein Kreisbogen ist

(Abb. 45). Hier steht nichts im Wege, sich die Anzahl der Abschnitte ds unendlich gross zu denken. Der Maassstab des Summationspolygons kann so gewählt werden, dass das zu einem beliebigen ds gehörige $ds\mathfrak{r}$ in der Grösse ds in das Summationspolygon eingetragen wird. Dieses geht dann selbst in einen Kreisbogen über, der dem gegebenen congruent und um einen rechten Winkel dagegen gedreht ist. Der Radiusvector $\mathfrak{s}$ des Schwerpunktes erlangt daher im Summationspolygone die Länge l der Kreisbogensehne. Die wahre Länge s wird daraus durch die Ueberlegung gefunden, dass das Product $ds \cdot r$ durch ds dargestellt wurde und dass in demselben Maassstabe l das Product aus s und der Bogenlänge b angibt. Wir haben also die Proportion

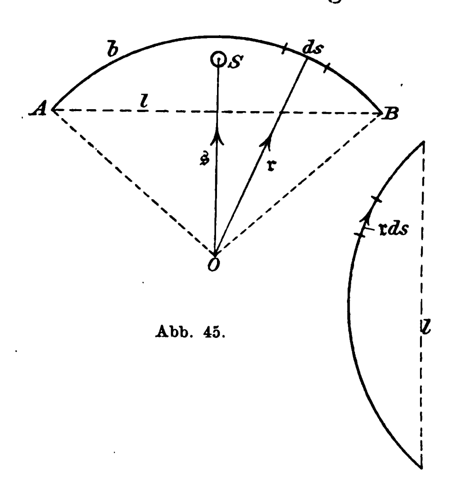


Abb. 45.

$$\frac{ds}{r\,ds} = \frac{l}{b\,s}$$

und hieraus

$$s = \frac{lr}{b} = \frac{l}{\alpha},$$

wenn mit α der in Bogenmaass gemessene Centriwinkel des Kreisbogens bezeichnet wird. Für einen Halbkreisbogen ist also z. B. der Abstand des Schwerpunktes vom Durchmesser $s = 2r/\pi$.

Wenn die Gestalt der krummen Linie durch ihre Gleichung nach den Methoden der analytischen Geometrie gegeben ist, kann man die Coordinaten des Schwerpunktes auch durch Rechnung finden. Für die Axe OX hat man

$$s\int ds = \int y\,ds,$$

und nach Ausführung der Integrationen, die über die ganze Bogenlänge AB zu erstrecken sind, erhält man daraus den Schwerpunktsabstand s von der X-Axe. Der Abstand von der Y-Axe kann ebenso ermittelt werden. Besondere Beispiele dazu gebe ich nicht, da es sich hierbei eigentlich nur um Uebungen in der Auswerthung bestimmter Integrale handelt, die besser im Anschlusse an die Vorlesungen über höhere Mathematik vorgenommen werden.

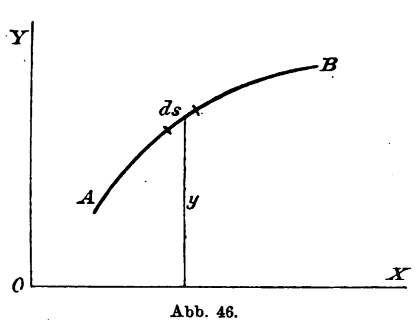


Abb. 46.

Ganz ebenso gestaltet sich auch die Schwerpunktsermittelung von Flächen nach der analytischen Methode. Der Beitrag des Streifens ydx in Abb. 47 zu dem statischen Momente der Fläche für die X-Axe ist gleich $ydx \cdot \frac{y}{2}$ und daher der Schwerpunktsabstand s von der X-Axe

$$s = \frac{\frac{1}{2}\int y^2 dx}{\int y dx}.$$

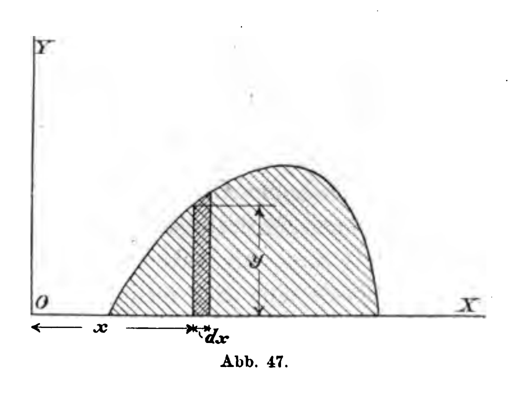


Abb. 47.

Die einzige Schwierigkeit besteht in der Auswerthung der bestimmten Integrale, die freilich oft viel Arbeit verursachen kann.

An Stelle der soeben vorgenommenen Flächenzerlegung ist oft eine andere zweckmässiger, wie am Beispiele des Dreiecks gezeigt werden soll. Alle Theile des in Abb. 48 schraffirten unendlich schmalen Streifens haben denselben

Abstand y von der Grundlinie. Die Breite des Streifens ist

$$g\frac{h-y}{h}.$$

Das statische Moment der Dreiecksfläche in Bezug auf die Grundlinie wird daher

$$\int_0^h g\frac{h-y}{h}\,dy\cdot y = g\int_0^h y\,dy - \frac{g}{h}\int_0^h y^2 dy = g\frac{h^2}{2} - \frac{g}{h}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{gh^2}{6}.$$

Durch Division mit der Dreiecksfläche erhalten wir daraus den Abstand des Schwerpunktes von der Grundlinie gleich $\frac{h}{3}$.

Einfacher gelangt man zu diesem Resultate dadurch, dass man die Spitze des Dreiecks zum Anfangspunkte wählt und den Satz $M\mathfrak{s} = \Sigma m\mathfrak{r}$ anwendet. Der Schwerpunkt des schraffirten Streifens liegt nämlich in der Mitte und für ihn ist daher $m\mathfrak{r}$ von der Spitze nach der Streifenmitte gerichtet. Alle Glieder in der Summe $\Sigma m\mathfrak{r}$ fallen daher in die Richtung der von der Spitze aus nach der Gegenseite gezogenen Mittellinie. Die gleiche Richtung hat demnach auch $\mathfrak{s}$ und wir erkennen daraus, dass jede Mittellinie eines Dreiecks eine Schwerlinie ist. Der Schnittpunkt der drei Mittellinien ist daher der Schwerpunkt und aus der Planimetrie ist schon bekannt, dass dieser Schnittpunkt in $\frac{1}{3}$ der Dreieckshöhe liegt, was mit dem vorher gefundenen Resultate übereinstimmt.

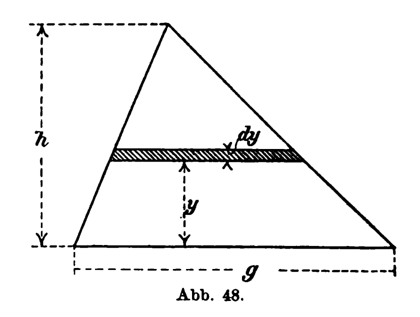


Abb. 48.

Um den Schwerpunkt eines Vierecks zu ermitteln, zerlegt man das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, für die man die Schwerpunkte durch Ziehen der Mittellinien aufsucht. Die Verbindungslinie beider Theilschwerpunkte liefert eine Schwerlinie des Vierecks. Hierauf zieht man die andere Diagonale und wiederholt das Verfahren. Der Schnittpunkt

beider Schwerlinien ist der gesuchte Schwerpunkt. Auch der Schwerpunkt eines Fünfecks kann nach demselben Verfahren ermittelt werden. Man zieht zuerst eine Diagonale, durch die das Fünfeck in ein Dreieck und ein Viereck zerlegt wird. Von beiden sucht man nach dem beschriebenen Verfahren die Schwerpunkte auf und erhält in der Verbindungslinie beider eine Schwerlinie. Die Wiederholung des Verfahrens für eine zweite Zerlegung des Fünfecks liefert eine andere Schwerlinie und der Schnittpunkt von beiden den Schwerpunkt.

Anstatt dessen kann man auch das Fünfeck sofort durch zwei Diagonalen in drei Dreiecke zerlegen. Man sucht deren Schwerpunkte auf und berechnet die Dreiecksflächen. Jedem Theilschwerpunkte legt man eine Masse bei, die der Dreiecksfläche proportional ist, und ermittelt die geometriche Summe $\Sigma m \mathfrak{r}$ für die drei Massenpunkte mit Hülfe eines Summationspolygons. Durch Division mit der Fläche des Fünfecks erhält man hieraus $\mathfrak{s}$ und damit auch den Schwerpunkt S. Zur Vereinfachung dieses Verfahrens ist es zweckmässig, einen der Theilschwerpunkte als Anfangspunkt der Radienvectoren zu wählen, weil dann ein Glied in $\Sigma m \mathfrak{r}$ fortfällt, so dass man nur noch zwei Glieder graphisch zu summiren hat.

Auch für Polygone mit beliebig vielen Seiten ist das zuletzt beschriebene Verfahren bequem anwendbar. Bei beliebig gestalteten Figuren kann man auch so verfahren, dass man zunächst eine Zerlegung in einzelne Theile vornimmt, deren Schwerpunkte entweder nach den vorhergehenden Lehren sofort angegeben werden können oder die man mit genügender Genauigkeit einschätzen kann, worauf man an den Theilschwerpunkten parallele Kräfte anbringt, die den zugehörigen Flächen proportional sind, und die Kräfte zu einer Resultirenden vereinigt. Wie dies am bequemsten ausgeführt wird, werde ich erst bei einer späteren Gelegenheit zeigen. Die Richtungslinie der Resultirenden ist eine Schwerlinie. Nach Wiederholung des Verfahrens für eine andere Richtung der parallelen Kräfte erhält man den Schwerpunkt. Gewöhnlich ist aber, wenn es sich nur um die Ermittelung des Schwerpunktes und

nicht gleichzeitig auch um die Beantwortung anderer Fragen handelt, von denen später die Rede sein wird, die Ausführung der Summirung $\Sigma m\mathfrak{r}$ einfacher als die Kräftezusammensetzung.

Manchmal ist es bequemer, eine Figur als Differenz von zwei anderen aufzufassen, falls deren Schwerpunkte leicht angegeben werden können. Auch dann ist die Verbindungslinie beider Schwerpunkte eine Schwerlinie für die gegebene Figur. Denn die gegebene Figur und die sie ergänzende bilden zusammen die umschliessende Figur und die drei Schwerpunkte müssen nach den früheren Lehren auf einer Graden liegen.

Die Schwerpunkte von Körpern mit gleichförmiger Massenvertheilung können nach denselben Regeln ermittelt werden, zunächst also analytisch durch Berechnung von Σmx, worin x den Abstand von einer festen Ebene bedeutet, mit Hülfe bestimmter Integrale. Für ein Tetraeder findet man grade so wie beim Dreiecke, dass die Verbindungslinie einer Ecke mit dem Schwerpunkte einer Gegenseite eine Schwerlinie bildet. Diese vier „Mittellinien", wie man sie auch hier passend nennt, schneiden sich in einem Punkte, der um ein Viertel der Höhe von jeder Basisfläche entfernt ist.

§ 27. Die Guldin'sche Regel.

Eine grade oder krumme Linie AB in Abb. 49 möge um die Axe YY gedreht werden, so dass sie eine Rotationsfläche beschreibt. Der Winkel, um den wir drehen, kann beliebig gross sein und sei mit α bezeichnet; er kann auch eine volle Umdrehung bilden. Ein Bogenelement ds beschreibt hierbei eine Fläche, deren Inhalt gleich $ds \cdot \alpha x$ ist und die ganze Fläche wird daher gleich

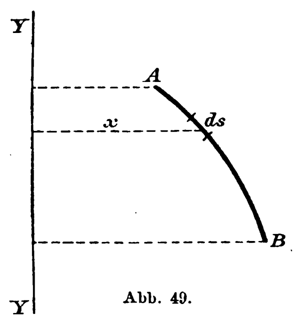


Abb. 49.

$$\alpha \int x ds .$$

Dafür kann man aber auch nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$\alpha \cdot sb$$

setzen, wenn b die Bogenlänge und s den Schwerpunktsabstand von YY bedeuten. Daraus folgt, dass der Inhalt der Rotationsfläche gleich der Bogenlänge multiplicirt mit dem Schwerpunktswege ist.

So wird z. B. eine Kugelfläche durch volle Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser erhalten. Der Schwerpunktsabstand für den Halbkreis war vorher zu $2\, r/\pi$ ermittelt und der Schwerpunktsweg für eine volle Umdrehung ist daher gleich $4r$. Multiplicirt man dies mit der Bogenlänge πr des Halbkreises, so erhält man den Inhalt der Kugeloberfläche zu $4\pi r^2$. Natürlich kann man auch umgekehrt nach diesem Satze, der gewöhnlich als die Guldin'sche Regel bezeichnet wird, den Schwerpunktsabstand für den Bogen AB berechnen, wenn der Inhalt der Rotationsfläche bereits bekannt ist.

Der Satz gilt auch für das Volumen, das von einer ebenen Figur bei Umdrehung um eine in ihrer Ebene liegende Axe beschrieben wird. Das von dem Flächenelemente dF in Abb. 50 beschriebene Volumen ist gleich $\alpha x dF$ und das ganze Volumen daher

$$\alpha \int x dF,$$

wofür nach der Lehre vom Schwerpunkte

$$\alpha \cdot sF$$

gesetzt werden kann. Das Volumen eines Rotationskörpers ist daher gleich dem Flächeninhalte des Querschnitts multiplicirt mit dem Wege des Schwerpunktes. Hiernach kann man z. B. den Abstand des Schwerpunktes einer Halbkreisfläche von dem Durchmesser berechnen. Das bei einer vollen Umdrehung um den Durchmesser beschriebene Kugelvolumen ist gleich $4\pi r^3/3$. Durch Division mit der Halbkreisfläche $\pi r^2/2$ erhält man daraus für den Schwerpunktsweg $\frac{8r}{3}$. Der Schwerpunktsabstand wird daraus durch Division mit 2π, also gleich $\frac{4r}{3\pi}$ gefunden.

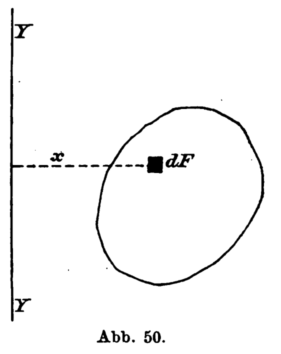


Abb. 50.

§ 28. **Stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht.**

Eine Kugel, die auf eine ebene Platte gelegt wird, bleibt in jeder Lage, die man ihr geben mag, im Gleichgewichte, wenn ihre Masse gleichmässig über das Volumen vertheilt ist, der Schwerpunkt also mit dem Kugelmittelpunkte zusammenfällt. Denn bei jeder virtuellen Verschiebung, die man ihr aus ihrer augenblicklichen Lage ertheilt, bewegt sich der Schwerpunkt in horizontaler Richtung und die von dem Gewichte der Kugel geleistete Arbeit ist daher gleich Null. Auch der Auflagerdruck, der von der Platte auf die Kugel übertragen wird, leistet, wenn von Reibung abgesehen wird, keine Arbeit, denn durch den Berührungspunkt geht beim Rollen der Kugel die Momentanaxe und beim Gleiten bewegt sich zwar der Berührungspunkt, aber in einer Richtung senkrecht zum Auflagerdrucke. Reibungen, die etwa in Betracht zu ziehen wären, widersetzten sich der Bewegung und zu ihrer Ueberwindung wäre eine positive Arbeitsleistung erforderlich. Aber auch ohne Reibungen kann sich die Kugel nicht von selbst nach irgend einer Seite in Bewegung setzen, weil dazu eine positive Arbeitsleistung gehört, durch die sie die lebendige Kraft ihrer Bewegung erhält. Die Kugel muss also in der That in jeder Lage in Ruhe bleiben, und wenn sie etwas aus der ersten Lage verschoben wird, hat sie weder das Bestreben in diese Lage zurückkehren, noch sich weiter von ihr zu entfernen. Ein solches Gleichgewicht wird als ein indifferentes bezeichnet.

Man nehme ferner an, dass die Masse nicht gleichförmig über das Volumen der Kugel vertheilt sei, so dass der Schwerpunkt etwas excentrisch liegt. In diesem Falle bleibt die Kugel, falls Reibungen vermieden sind, nur dann im Gleichgewichte, wenn der Schwerpunkt entweder seine höchste oder seine tiefste Lage einnimmt. Denn zum Gleichgewichte gehört, dass die beiden einzigen Kräfte, die an der Kugel angreifen, nämlich das Gewicht und der Auflagerdruck, auf dieselbe Grade fallen. Die durch den Schwerpunkt lothrecht gezogene

Grade muss also durch den Auflagerpunkt der Kugel gehen und das ist nur möglich, wenn Auflagerpunkt, Schwerpunkt und Kugelmittelpunkt auf einer Graden liegen. Beide Gleichgewichtsfälle, die hiernach noch möglich sind, unterscheiden sich aber erheblich von einander. Wenn der Schwerpunkt seine höchste Lage einnimmt, bewegt er sich bei einer kleinen virtuellen Verschiebung zunächst in horizontaler Richtung. Besteht die virtuelle Verschiebung nämlich in einem Rollen, also in einer unendlich kleinen Drehung um eine durch den Auflagerpunkt gehende horizontale Axe, so beschreibt der Schwerpunkt einen unendlich kleinen Kreisbogen, der senkrecht zum Radius, senkrecht also zu der vom Auflagerpunkte zum Schwerpunkte gezogenen Verbindungslinie steht. Da dieser Radius selbst lothrecht stand, muss der Kreisbogen horizontal gerichtet sein. Insofern ist also in der That die Arbeitsleistung des Gewichtes bei der unendlich kleinen Verschiebung gleich Null zu setzen und die Gleichgewichtsbedingung ist erfüllt. Sobald aber die Drehung nicht ganz streng unendlich klein ist, findet doch eine kleine Senkung des Schwerpunktes und demnach eine Arbeitsleistung des Gewichtes statt, durch die der Körper in diese Bewegung versetzt werden kann. Zu einer Verschiebung des Schwerpunktes in horizontaler Richtung, die von der ersten Ordnung klein ist, gehört eine Verschiebung in lothrechter Richtung, die klein von der zweiten Ordnung ist. Man erkennt daraus, dass sich die Kugel, wenn alle äusseren Störungen fern gehalten sind, zwar nicht von selbst aus der Gleichgewichtslage entfernen kann, dass sie aber, wenn sie durch andere Umstände ein wenig aus dieser Lage verschoben war, nicht mehr im Gleichgewichte ist, sondern sich stets weiter aus ihr entfernt. Ein solches Gleichgewicht heisst instabil oder labil. Ein streng instabiles Gleichgewicht kann überhaupt nicht verwirklicht werden, da es nicht möglich ist, alle kleineren Erschütterungen, Luftströmungen u. s. f., die zu einem ersten kleinen Ausweichen führen können, von dem Körper fern zu halten, und weil es ausserdem auch gar nicht möglich wäre, dem Körper anfäng-

lich die genaue mathematische Gleichgewichtslage ohne die geringste Abweichung zu geben. Sobald etwas rollende Reibung — oder überhaupt irgend ein derartiger Bewegungswiderstand — hinzukommt, hört aber das Gleichgewicht auf, streng instabil zu sein, und es kann dann wohl verwirklicht werden. So ist es z. B. nicht unmöglich, einen Stuhl auf zwei Beinen zu balanciren. Im Gartensande gelingt es ganz leicht; es wird freilich um so schwerer, die richtige Anfangslage zu treffen und störende Erschütterungen fern zu halten, je glatter der Fussboden ist. Grade die Erfahrungen über das instabile Gleichgewicht geben übrigens einen guten Anhaltspunkt zur Beurtheilung der Grösse der rollenden Reibung.

Wenn der Schwerpunkt seine tiefste Lage hat, ist die Arbeitsleistung des Gewichts für eine unendlich kleine Verschiebung immer noch Null oder, wenn man will, unendlich klein von der zweiten Ordnung. Für eine endliche Verschiebung wird aber die Arbeitsleistung negativ. Ohne von aussen geleistete positive Arbeit ist die Verschiebung daher nicht möglich. Nach einer kleinen Lagenänderung bleibt der Körper, falls Reibungen vermieden sind, nicht mehr im Gleichgewichte, sondern er kehrt in die Anfangslage zurück. Eine solche Gleichgewichtslage wird als eine stabile bezeichnet.

Ganz ähnlich wie jetzt bei der auf einer horizontalen Platte aufruhenden Kugel wird auch in allen anderen Fällen verfahren, um zwischen den verschiedenen Arten des Gleichgewichtes zu unterscheiden. Aus einem zweiten Beispiele wird dies noch besser hervorgehen. Auf einer kugelförmigen Oberfläche vom Halbmesser R sei eine Kugel vom Halbmesser r aufgestellt (Abb. 51), deren Schwerpunkt um e unterhalb des Kugelmittelpunktes liegt. Die Höhe $r - e$ des Schwerpunktes über dem Auflagerpunkte sei mit x bezeichnet. Es fragt sich, wie gross x sein muss, wenn das Gleichgewicht indifferent, stabil oder labil sein soll. Zunächst sei übrigens noch darauf hingewiesen, dass die kugelförmige Gestalt der sich berührenden Körper nur in der unmittelbaren Nachbar-

schaft der Berührungsstelle von Bedeutung ist; überall sonst kann man sich die Körper beliebig umgrenzt vorstellen.

Man denke sich die obere Kugel um ein kleines Stück aus der Gleichgewichtslage fortgerollt und berechne, um wie viel sich ihr Schwerpunkt bei dieser Bewegung hebt oder senkt.

Zu diesem Zwecke können wir uns die Kugel zunächst um den Mittelpunkt der unteren Kugel gedreht denken, so lange bis ihr Mittelpunkt die neue Lage einnimmt, worauf wir eine Drehung um den Mittelpunkt der oberen Kugel folgen lassen, von solcher Grösse, dass der von einem Punkte des Umfangs beschriebene Bogen gleich dem auf der unteren Kugelfläche zurückgelegten Wege wird. Diese Bedingung muss nämlich offenbar erfüllt sein, damit die Kugel auch durch blosses Rollen ohne Gleiten in die neue Lage gelangen kann.

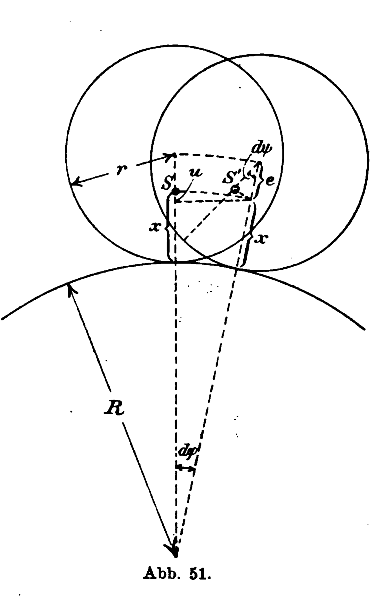


Abb. 51.

Bei der ersten Bewegung beschreibt der Schwerpunkt S einen Bogen vom Halbmesser $R+x$ und vom Centriwinkel $d\varphi$, dessen Projection auf die Lothrechte von der zweiten Ordnung unendlich klein ist und mit u bezeichnet sei. Man erhält dafür

$$u = (R+x)(1 - \cos d\varphi) = (R+x)\frac{d\varphi^2}{2},$$

wenn der Cosinus des unendlich kleinen Winkels $d\varphi$ in eine Reihe entwickelt wird, von der es genügt, bis zu dem von der zweiten Ordnung kleinen Gliede zu gehen.

Der auf der unteren Kugelfläche bei der ersten Bewegung beschriebene Bogen ist gleich $Rd\varphi$. Wir müssen jetzt die obere Kugel um ihren Mittelpunkt um einen Winkel $d\psi$ drehen, so dass

$$r d\psi = R d\varphi$$

ist. Hierbei hebt sich der Schwerpunkt um einen Betrag z; der Deutlichkeit wegen ist diese zweite Bewegung in Abb. 52 vergrössert und mit Weglassung der Umrisslinien u. s. f. dargestellt. Wir berechnen zuerst die Strecke $z + y$ und hierauf y grade so wie vorher u und finden hieraus z, nämlich

$$z + y = e\,(1 - \cos(d\varphi + d\psi)) = e\frac{(d\varphi + d\psi)^2}{2},$$

$$y = e\,(1 - \cos d\varphi) = e\frac{d\varphi^2}{2},$$

$$z = e\frac{(d\varphi + d\psi)^2 - d\varphi^2}{2} = e\,d\psi \cdot \frac{d\psi + 2\,d\varphi}{2}.$$

Wenn z gleich u ist, findet, bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung genau, weder eine Hebung noch eine Senkung des Schwerpunktes statt und das Gleichgewicht ist indifferent. Die Bedingung dafür lautet also

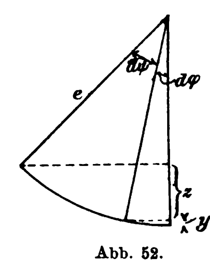


Abb. 52.

$$(R + x)\,d\varphi^2 = (r - x)\,(d\psi^2 + 2\,d\varphi d\psi).$$

Beachtet man, dass

$$d\psi = \frac{R}{r}\,d\varphi$$

ist, so geht dies über in

$$R + x = (r - x)\left(\frac{R^2}{r^2} + 2\frac{R}{r}\right)$$

und die Auflösung dieser Gleichung nach x liefert

$$x = \frac{Rr}{R + r}.$$

Liegt der Schwerpunkt tiefer, so ist das Gleichgewicht stabil, im entgegengesetzten Falle labil.

Bei dieser Betrachtung ist eine Störung des Gleichgewichts nur in Form einer rollenden Bewegung in Aussicht genommen worden. Wenn die Kugeln absolut glatt wären, so dass gar keine gleitende Reibung in Betracht käme, wäre das Gleichgewicht freilich bei jedem Werthe von x labil, denn dann könnte der vorher zuerst ins Auge gefasste Bewegungsantheil auch für sich allein zu Stande kommen und die mit ihm ver-

bundene Bewegung u des Schwerpunktes wäre in jedem Falle nach abwärts gerichtet. Thatsächlich genügt aber die gleitende Reibung auch bei den glattesten Oberflächen, die wir herstellen können, um eine solche Bewegung auszuschliessen, so dass nur auf die rollende Bewegung geachtet zu werden braucht. Die rollende Reibung, die sich dieser etwa noch widersetzt, würde zur Folge haben, dass x noch um eine Kleinigkeit grösser sein dürfte, als vorher berechnet, ehe das labile Gleichgewicht eintritt. Bei glatten und harten metallischen Oberflächen ist dieser Einfluss der rollenden Reibung aber nur unbedeutend.

Man kann die Aufgabe übrigens auch dadurch lösen, dass man die Curve untersucht, die der Schwerpunkt bei der epicyklischen Bewegung der oberen Kugel auf der unteren beschreibt. Wenn die Curve nach unten concav ist, ist das Gleichgewicht labil, im umgekehrten Falle ist es stabil und indifferent ist es, wenn der Krümmungshalbmesser der Curve im Scheitel unendlich gross wird.

Auch für den Fall, dass die obere Kugel durch eine Platte mit ebener Unterfläche ersetzt wird oder dass die untere Kugelfläche nach oben hin hohl ist, führt die vorige Behandlung leicht zum Ziele. Bei ellipsoidischen Flächen wird die Rechnung aber natürlich verwickelter. Verwandt mit diesen Betrachtungen ist auch die Lehre von der Stabilität des Gleichgewichts schwimmender Körper, die aber an anderer Stelle behandelt werden wird (§ 64).

§ 29. Satz von der Bewegung des Schwerpunktes.

Ein beliebiger Punkthaufen bewege sich unter dem Einflusse bekannter äusserer Kräfte. Es ist dabei nicht nöthig, dass die Punkte des Haufens fest miteinander zusammenhängen; sie können auch ganz unabhängig von einander sein. Die Lage des Schwerpunktes wird in jedem Augenblicke durch den von einem festen Anfangspunkte gezogenen Radiusvector $\mathfrak{s}$ bestimmt, der durch die Gleichung

$$M\mathfrak{s} = \Sigma m \mathfrak{r}$$

gegeben ist (Abb. 53). Nach Verlauf eines Zeittheilchens dt hat sich jedes $\mathfrak{r}$ um ein $d\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ um $d\mathfrak{s}$ geändert, so dass auch nachher wieder

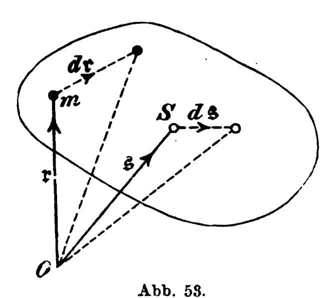


Abb. 53.

$$M(\mathfrak{s} + d\mathfrak{s}) = \Sigma m(\mathfrak{r} + d\mathfrak{r})$$

ist. Subtrahirt man beide Gleichungen von einander und dividirt durch dt, so wird

$$M\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \Sigma m \frac{d\mathfrak{r}}{dt}. \qquad (75)$$

Der Differentialquotient des von dem festen Anfangspunkte aus gerechneten Radiusvectors eines Punktes nach der Zeit gibt aber nach Richtung und Grösse die Geschwindigkeit dieses Punktes an. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes mit $\mathfrak{v}$ und die des Schwerpunktes mit $\mathfrak{v}_0$, so kann demnach Gl. (75) auch in der Form

$$M\mathfrak{v}_0 = \Sigma m \mathfrak{v} \qquad (76)$$

geschrieben werden. Das Product aus Masse und Geschwindigkeit heisst Bewegungsgrösse und unter der Bewegungsgrösse eines Punkthaufens wird die geometrische Summe der Bewegungsgrössen aller Punkte des Haufens verstanden. Gl. (76) kann daher dahin ausgesprochen werden, dass die Bewegungsgrösse eines beliebigen Punkthaufens gleich der Gesammtmasse des Haufens multiplicirt mit der Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist. Wenn der Schwerpunkt ruht, ist die Bewegungsgrösse des ganzen Haufens gleich Null.

Auch Gl. (76) gilt in jedem Augenblicke. Nach Ablauf eines Zeitelementes dt ändert sich jedes $\mathfrak{v}$ um irgend ein $d\mathfrak{v}$; man hat daher auch

$$M(\mathfrak{v}_0 + d\mathfrak{v}_0) = \Sigma m(\mathfrak{v} + d\mathfrak{v})$$

und nach Subtraction von Gleichung (76) und Division mit dt wird daraus

$$M\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \Sigma m \frac{d\mathfrak{v}}{dt}. \qquad (77)$$

Der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit ist die Beschleunigung des Punktes und nach dem dynamischen Grundgesetze ist das Product aus Masse und Beschleunigung jedes Punktes gleich der Resultirenden aller an diesem Punkte angreifenden Kräfte. Diese Kräfte kommen theils von aussen, theils gehen sie von den übrigen Punkten des Haufens aus. Die Resultirende der äusseren Kräfte an irgend einem Punkte des Haufens sei mit $\mathfrak{P}$ und irgend eine von den inneren Kräften, die an ihm angreifen, mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet; dann ist für diesen Punkt

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{J}$$

und Gl. (77) geht durch Einsetzen dieses Werthes über in

$$M\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \Sigma\mathfrak{P} + \Sigma\Sigma\mathfrak{J}.$$

Nach dem Wechselwirkungsgesetze ist aber die Gesammtsumme aller inneren Kräfte gleich Null; die vorige Gleichung vereinfacht sich daher zu

$$M\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \Sigma\mathfrak{P}. \tag{78}$$

Diese Gleichung spricht den Satz von der Bewegung des Schwerpunktes aus. Sie hat nämlich genau die Form der dynamischen Grundgleichung für einen einzelnen Massenpunkt, der mit dem Schwerpunkte zusammenfällt und dessen Masse M ist, während alle äusseren Kräfte $\mathfrak{P}$ unmittelbar an ihm angreifen. Der Schwerpunkt eines beliebig zusammengesetzten Punkthaufens bewegt sich demnach stets so, als wenn die ganze Masse des Haufens in ihm vereinigt wäre und als wenn alle äusseren Kräfte, die auf die einzelnen Punkte des Haufens wirken, in gleicher Grösse und Richtung an ihm angebracht wären.

Immer wenn man in der Mechanik des materiellen Punktes einen Körper unter dem Bilde eines einzelnen materiellen Punktes auffasst, denkt man sich seine Masse in diesem Punkte vereinigt und auch alle Kräfte an diesen Punkt ver-

legt. Der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes lehrt uns erst nachträglich, inwiefern dies berechtigt ist und welcher Punkt des Körpers zu diesem Zwecke ausgesucht werden muss. Wir sehen jetzt, dass es selbst bei der verwickeltsten Bewegung, die ein starrer Körper auszuführen vermag, bis zu einem gewissen Grade immer noch zulässig ist, den Körper als einzelnen Punkt zu betrachten; man erhält auf diese Art wenigstens die Bewegung des Schwerpunktes vollständig genau. Nur wenn es nöthig wird, auch über die Drehungen Rechenschaft zu geben, die der Körper daneben um Axen, die durch den Schwerpunkt gehen, ausführt, genügt es nicht mehr, sich den Körper im Schwerpunkte vereinigt zu denken.

Früher ist schon manchmal darauf hingewiesen worden, dass ein Kräftepaar einen starren Körper in Drehung zu versetzen suche. Diese Aussage war aber noch nicht ganz präcis und sie stützte sich eigentlich nur auf die unmittelbare Anschauung und Erfahrung. Erst der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes gestattet, dies schärfer auszudrücken. Verlegt man nämlich beide Kräfte des Kräftepaares nach dem Schwerpunkte, so heben sie sich gegenseitig auf und wir erkennen, dass der Schwerpunkt in Ruhe bleibt, wenn der Körper vorher ruhte. Die Bewegung, die dem starren Körper durch ein Kräftepaar ertheilt wird, kann daher nur in einer Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe bestehen.

Wenn man irgend einen sperrigen Gegenstand, z. B. einen Stuhl, zum Fenster hinaus wirft, bemerkt man eine zunächst ganz ungeordnet scheinende Bewegung. Der Stuhl überschlägt sich — wenigstens im allgemeinen Falle, wenn nicht besondere Sorgfalt darauf verwendet wurde, ihm nur eine translatorische Bewegung zu ertheilen — mehrmals, und wenn man irgend eine einzelne Ecke ins Auge fasst, erkennt man, dass deren Bewegung sehr complicirt ist. Die Beschreibung dieser Bewegung wird aber sofort sehr vereinfacht, wenn wir darauf achten, dass der Schwerpunkt des Stuhles sich wie ein geworfener materieller Punkt, also, wenn der Luftwiderstand

vernachlässigt werden kann, in einer Parabel bewegt. Nachher fehlt nur noch die Untersuchung der Drehungen, die der Stuhl ausserdem um Schwerpunktsaxen ausführt. Dieser Theil der Betrachtung ist freilich der schwierigere und er wird erst im vierten Bande dieser Vorlesungen zur Erledigung kommen.

Ein bekanntes Beispiel zur Erläuterung des Schwerpunktsatzes bildet auch eine Granate, die während ihres Fluges durch die Luft platzt. Die einzelnen materiellen Punkte, die vorher einen starren Körper ausmachten, bilden nachher einen Haufen von Punkten, die sich unabhängig von einander bewegen. Aber auch hierbei bewegt sich der Schwerpunkt genau so weiter, als wenn die Granate noch zusammenhinge und alle Kräfte an ihr angriffen. In der Bewegung des Schwerpunktes würde in der That durch die Explosion nicht die geringste Aenderung herbeigeführt, wenn die Granate etwa durch den leeren Raum flöge. Bei der Bewegung durch die Luft trifft dies aber nicht völlig zu, weil der Luftwiderstand, den die einzelnen Stücke erfahren, zusammengenommen nicht genau dem Luftwiderstande für die ganze Granate entspricht.

Ein ähnliches, aber für die Technik weitaus wichtigeres Beispiel bildet die Locomotive in ihrem Laufe. Wir wollen zunächst annehmen, dass ein Eisenbahnzug in einem Gefälle bergab fahre, so dass die Bewegungswiderstände dadurch grade überwunden werden. Die Bewegung des Zuges erfolgt dann gleichförmig bei abgesperrtem Dampfzutritte. Auch der Schwerpunkt der Locomotive bewegt sich in diesem Falle gleichförmig. Auf der Locomotive verschieben sich aber die zu dem Kurbelmechanismus gehörigen Massen des Kolbens, der Kurbelstange u. s. f. nach einem bestimmten Gesetze und verlegen dadurch fortwährend den Schwerpunkt relativ zu dem Gestelle des Fahrzeuges. Gerade weil sich der Schwerpunkt des ganzen Systems gleichförmig bewegt, kann sich daher der Locomotivrahmen nicht gleichförmig bewegen. Er wird abwechselnd etwas zurück bleiben und wieder vorwärts gehen.

Ganz ähnlich gestaltet sich der Vorgang auch noch bei horizontaler Bahn und gleichförmiger Geschwindigkeit des

Zuges. Die Zugketten sind jetzt angespannt mit einer Kraft, die die an den angehängten Wagen auftretenden Bewegungswiderstände überwindet. Die Zugketten sind aber nicht mit dem Schwerpunkte der ganzen Locomotive, sondern mit dem Gestelle in Verbindung. Wegen der abwechselnd auftretenden Beschleunigungen und Verzögerungen des Gestells kann daher die Zugkraft — auch abgesehen von den Unterschieden, die durch die Kurbelstellungen bedingt sind — nicht gleichförmig übertragen werden. Es treten vielmehr Schwankungen in der Anspannung der Zugketten auf, die sich als Stösse bemerklich machen.

Man kann diese Schwankungen durch Anbringen eines Gegengewichtes am Treibrade gegenüber dem Kurbelzapfen beseitigen. Früher pflegte man oft die ganze Locomotive, nachdem sie fertig gestellt war, an Seilen aufzuhängen und das Gegengewicht so zu justiren, dass horizontale Schwingungen beim Ingangsetzen des Kurbelmechanismus vermieden wurden. Ein so umständlicher Versuch ist aber gar nicht nöthig, wenn man die Massen nur so berechnet, dass keine Horizontalverschiebungen des Schwerpunktes des ganzen Systems relativ zum Gestelle auftreten.

Damit allein ist aber der Gegenstand noch nicht ganz erledigt. Bei einem Massenausgleiche, der nur darauf Bedacht nimmt, Horizontalverschiebungen des Schwerpunktes auszuschliessen, lässt sich nämlich nicht verhindern, dass der Schwerpunkt Verticalverschiebungen relativ zum Gestelle erfährt. Beim Aufhängen der Locomotive an Seilen können sich diese nicht bemerklich machen, weil die Seile eine Verticalverschiebung des Gestells verhindern. Die Spannungen der Seile müssen aber zu diesem Zwecke fortwährenden Schwankungen unterliegen. Bei Verwendung einer derartig ausgeglichenen Locomotive zum Zugsdienste wird man nun zwar die vorher erwähnten stossartigen Schwankungen der Zugkraft nicht mehr zu befürchten haben, dagegen muss man nun Erhöhungen und Verminderungen des Raddruckes, mit dem die Locomotive auf den Schienen aufsitzt, mit in den Kauf nehmen. Diese

Schwankungen machen sich um so mehr bemerklich, je schneller die Locomotive läuft; sie wachsen mit dem Quadrate der Geschwindigkeit. Es kann in der That vorkommen, dass der Raddruck bei einer gewissen Stellung bis auf Null abnimmt und bei einer anderen bis zum doppelten Werthe des Raddrucks bei ruhender Locomotive ansteigt. Beide Erscheinungen sind bedenklich; die erste, weil sie eine Entgleisung der Locomotive herbeiführen könnte, die andere, weil die Beanspruchung der Schienen dadurch beträchtlich erhöht wird.

Eine ausführliche Behandlung der Frage des Massenausgleichs kann an dieser Stelle nicht gegeben werden; es sollte nur auf den grossen Nutzen aufmerksam gemacht werden, den der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes bei derartigen Untersuchungen gewährt. Besondere Bedeutung haben übrigens solche Untersuchungen in neuerer Zeit bei der Construction der Schiffsmaschinen erlangt, wobei es sich auch darum handelt, die in Folge der Eigenbewegungen der hin- und hergehenden Massen in den Maschinen auftretenden Schwingungen des Schiffskörpers nach Möglichkeit zu vermeiden. Im vierten Bande dieser Vorlesungen werde ich auf diese Fragen zurückkommen.

§ 30. **Lebendige Kraft eines starren Körpers.**

Die lebendige Kraft eines einzelnen materiellen Punktes von der Masse m und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist

$$m\frac{\mathfrak{v}^2}{2}$$

und die lebendige Kraft eines Punkthaufens ist gleich der Summe der lebendigen Kräfte aller Theile, also

$$L = \Sigma m\frac{\mathfrak{v}^2}{2}\cdot$$

Die Summirung ist hier eine gewöhnliche numerische, da die lebendige Kraft eine Grösse ohne Richtung und immer positiv ist.

Gehören alle Punkte des Haufens einem starren Körper an, so kann der vorhergehende Ausdruck noch einer sehr wichtigen Umformung unterzogen werden. Am einfachsten ist der Fall der Translationsbewegung zu erledigen. Hier ist der Factor $\frac{\mathfrak{v}^2}{2}$ für alle Punkte constant und man hat

$$L = M\frac{\mathfrak{v}^2}{2},$$

wenn M die Gesammtmasse des starren Körpers ist. In diesem Falle genügt es also auch bei der Berechnung der lebendigen Kraft, den ganzen Körper als einen einzigen materiellen Punkt aufzufassen.

Im allgemeinsten Falle wählen wir, wie im vorigen Abschnitte, einen Bezugspunkt, nach dem die Radienvectoren $\mathfrak{r}$ gehen, und setzen

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r}.$$

Als Bezugspunkt wird aber hier am zweckmässigsten der Schwerpunkt des starren Körpers gewählt. Wir bilden nun

$$\mathfrak{v}^2 = (\mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2 = \mathfrak{v}_0{}^2 + 2\mathfrak{v}_0 V\mathfrak{u}\mathfrak{r} + (V\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$L = \frac{1}{2}\Sigma m\mathfrak{v}_0{}^2 + \Sigma m\mathfrak{v}_0 \cdot V\mathfrak{u}\mathfrak{r} + \frac{1}{2}\Sigma m(V\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2.$$

Wir wollen zunächst das zweite Glied dieses Ausdrucks ins Auge fassen. Den richtungslosen Factor m können wir anstatt mit $\mathfrak{v}_0$ auch mit dem zweiten Factor des inneren Products vereinigen, also

$$\Sigma\mathfrak{v}_0 \cdot mV\mathfrak{u}\mathfrak{r}$$

dafür setzen. Nur ist aber $\mathfrak{v}_0$ bei der Summirung constant; es bedeutet die Geschwindigkeit des Schwerpunktes. Wir können daher den constanten Factor auch vor das Summenzeichen setzen und erhalten damit

$$\mathfrak{v}_0\Sigma mV\mathfrak{u}\mathfrak{r} \quad \text{oder auch} \quad \mathfrak{v}_0\Sigma V\mathfrak{u} \cdot m\mathfrak{r}.$$

Aber auch $\mathfrak{u}$ ist im gegebenen Augenblicke constant. Die Summirung, die jetzt noch vorgeschrieben ist, braucht daher

nur auf den anderen Factor des äusseren Products ausgedehnt zu werden. Wir erhalten dadurch

$$\mathfrak{v}_0 \cdot V\mathfrak{u} \cdot \Sigma m\mathfrak{r}.$$

Da der Schwerpunkt als Bezugspunkt gewählt war, ist nach der allgemeinen Schwerpunktseigenschaft

$$\Sigma m\mathfrak{r} = 0,$$

und hiermit nimmt auch der vorausgehende Ausdruck den Werth Null an. Der Ausdruck für die lebendige Kraft vereinfacht sich daher zu

$$L = \frac{1}{2}\Sigma m\mathfrak{v}_0{}^2 + \frac{1}{2}\Sigma m(V\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2.$$

Das erste Glied dieses Ausdrucks hat aber eine einfache Bedeutung: es gibt die lebendige Kraft an, die der Körper hätte, wenn seine ganze Masse im Schwerpunkte vereinigt wäre. Wenn die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ der Rotation gleich Null wäre, würde das erste Glied allein übrig bleiben; man bezeichnet es daher als die lebendige Kraft der Translation oder kürzer als die Translationsenergie des Körpers. Das letzte Glied hängt nur von der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ ab und es wird daher als die Rotationsenergie bezeichnet.

Die zu $\mathfrak{u}$ äussere Componente von $\mathfrak{r}$ ist der senkrechte Abstand des betreffenden Massenpunktes von der durch den Schwerpunkt gehenden Rotationsaxe. Gebrauchen wir dafür die Bezeichnung y, so ist

$$(V\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2 = u^2y^2,$$

und da der Factor u constant ist, wird

$$\Sigma m(V\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2 = u^2\Sigma my^2.$$

Der hier noch vorkommende Summenausdruck hängt nur von der Gestalt und Massenvertheilung des Körpers und von der Lage der Rotationsaxe ab. Er kann, wenn der Körper gegeben ist, für jede Schwerpunktsaxe von vornherein berechnet werden. Ausdrücke von dieser Bauart werden ganz allgemein als Momente bezeichnet und zwar, wenn der Abstand, wie hier, im Quadrate darin vorkommt, als Momente

zweiten Grades. Wir werden später noch andere Momente zweiten Grades kennen lernen; das wichtigste unter ihnen ist aber das uns hier zum ersten Male entgegentretende. Es führt daher auch noch einen besonderen Namen und zwar wird es das Trägheitsmoment des Körpers für die betreffende Schwerpunktsaxe genannt. Ich werde es stets mit dem Buchstaben Θ bezeichnen. Für L erhalten wir nun schliesslich

$$L = \frac{1}{2} M \mathfrak{v}_0^2 + \frac{1}{2} \Theta u^2. \tag{79}$$

Die Spaltung der lebendigen Kraft des starren Körpers in ein Glied, das die Energie der fortschreitenden und in ein anderes, das die Energie der drehenden Bewegung darstellt, gewinnt, ganz abgesehen von der Bequemlichkeit, die dadurch für die Berechnung herbeigeführt wird, noch eine besondere Bedeutung durch die folgende Bemerkung. Ein starrer Körper, der sich beliebig bewegt, möge ganz sich selbst überlassen werden, also so, dass entweder gar keine Kräfte von aussen her auf ihn einwirken oder so, dass die äusseren Kräfte im Gleichgewichte miteinander stehen. Dann bewegt sich, wie wir schon wissen, der Schwerpunkt gradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiter. Die Translationsenergie bleibt also constant. Ausserdem kann sich aber auch die ganze lebendige Kraft nicht ändern, da die äusseren Kräfte keine Arbeit leisten und die Arbeit der inneren Kräfte für den starren Körper immer gleich Null ist. Daraus folgt, dass auch die Rotationsenergie constant bleiben muss. Es kann also von selbst keine Umwandlung des einen Energieantheiles in den anderen eintreten; beide bleiben vielmehr für sich unabhängig von einander bestehen. Wenn der Körper an ein Hinderniss stösst, kann aber natürlich eine Umwandlung von Rotationsenergie in Translationsenergie oder umgekehrt eintreten.

Es möge auch auf die ganz verwandte Gestalt beider Glieder in dem Ausdrucke von L geachtet werden. Der Masse M im ersten Gliede entspricht das Trägheitsmoment Θ im zweiten Gliede, der Fortschreitungsgeschwindigkeit im einen

die Drehgeschwindigkeit im anderen Falle. Man kann gradezu sagen, dass das Trägheitsmoment eine Art von Masse ist, die bei drehenden Bewegungen in Frage kommt, und daher stammt auch der dafür gewählte Name. Ein wesentlicher Unterschied besteht nur insofern, als M für alle Richtungen von $\mathfrak{v}_0$ denselben Werth hat, während Θ von der Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ abhängt. Später wird die Abhängigkeit des Trägheitsmomentes von der Richtung der Schwerpunktsaxe näher untersucht werden.

Wenn der Schwerpunkt ruht, vereinfacht sich Gl. (79) zu

$$L = \frac{1}{2}\Theta u^2. \tag{80}$$

Dieser Ausdruck kann aber auch ganz allgemein beibehalten werden, wenn die Bewegung des starren Körpers nur in einer Rotation besteht. Denn die Geschwindigkeit eines Punktes wird in diesem Falle ihrem Absolutbetrage nach stets durch den Ausdruck uy angegeben und man hat

$$L = \frac{1}{2}\Sigma m u^2 y^2 = \frac{1}{2}u^2\Theta.$$

Es ist aber jetzt nicht nöthig, dass die Rotationsaxe durch den Schwerpunkt geht; die Abständen y sid von der Rotationsaxe zu rechnen und das Trägheitsmoment bezieht sich auf dieselbe Axe. Diese Art der Berechnung der lebendigen Kraft ist namentlich dann bequem, wenn ein Maschinentheil dauernd um dieselbe feste Axe rotirt.

Wird die Rotation eines starren Körpers um eine feste Axe durch ein Kräftepaar vom Momente Pp beschleunigt, so besteht eine einfache Beziehung zwischen diesem Momente und der Winkelbeschleunigung $\frac{du}{dt}$, die aus dem Satze von der lebendigen Kraft wie folgt abgeleitet wird. Die Arbeit des Kräftepaars, dessen Ebene senkrecht zur Drehaxe stehen möge, während der im Zeittheilchen dt erfolgenden Drehung um den Winkel udt ist nach § 22 gleich $Ppudt$. Bezeichnet man also die Zunahme der lebendigen Kraft L während dt mit dL, so ist nach dem Satze von der lebendigen Kraft

$$dL = Ppu\,dt \quad \text{oder} \quad \frac{dL}{dt} = Ppu.$$

Andererseits erhält man durch Differentiation des Ausdruckes von L nach t
$$\frac{dL}{dt} = u\Theta\frac{du}{dt}$$
und durch Gleichsetzen beider Werthe folgt
$$\Theta\frac{du}{dt} = Pp. \tag{81}$$

Diese Gleichung tritt an die Stelle der dynamischen Grundgleichung bei der drehenden Bewegung. Die Masse ist ersetzt durch das Trägheitsmoment, die Beschleunigung durch die Winkelbeschleunigung und die Kraft durch das Moment des Kräftepaars.

Aufgaben.

16. Aufgabe. Man soll den Schwerpunkt eines symmetrischen Parabelsegments ermitteln.

Lösung. In diesem Falle führt die Rechnung leicht zum Ziele. Man wähle die Sehne als X-Axe, einen Endpunkt als Ursprung. Wird die Länge der Sehne mit l und die Pfeilhöhe des Bogens mit f bezeichnet, so lautet die Parabelgleichung
$$y = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2).$$

Für den Abstand s des Schwerpunktes von der Sehne hat man nach § 26
$$s = \frac{1}{2}\frac{\int y^2 dx}{\int y\,dx}.$$

Für das erste Integral erhält man
$$\int_0^l y^2 dx = \frac{16f^2}{l^4}\int_0^l (l^2x^2 - 2lx^3 + x^4)\,dx = \frac{16f^2}{l^4}\left[l^2\frac{x^3}{3} - 2l\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^l$$
$$= \frac{16f^2}{l^4}\cdot\frac{l^5}{30} = \frac{8}{15}f^2l.$$

Ebenso findet man
$$\int_0^l y\,dx = \frac{4f}{l^2}\int_0^l (lx - x^2)\,dx = \frac{2}{3}fl$$

und hiermit
$$s = \frac{2}{5} f.$$

17. Aufgabe. Eine an den Enden mit Rollen versehene Stange, deren Schwerpunkt in der Stangenmitte liegt, stützt sich, wie in Abb. 54 gezeichnet, gegen zwei unter 45⁰ geneigte Ebenen. Ist das Gleichgewicht stabil oder labil, wenn die Stange horizontal steht?

Lösung. Die Rollenmittelpunkte verschieben sich parallel zu den stützenden Ebenen. Wenn die Stange in eine andere Lage gebracht wird, schneidet sie von dem durch die beiden Parallelen gebildeten Winkelraume ein rechtwinkliges Dreieck ab. Die Verbindungslinie der Mitte der Hypotenuse mit der gegenüberliegenden Ecke ist aber bei jedem rechtwinkligen Dreiecke gleich der Hälfte der Hypotenuse. Bei jeder Lage der Stange behält also der Schwerpunkt denselben Abstand von dem Scheitel des rechten Winkels, d. h. er bewegt sich auf einem Kreisbogen, der von diesem Punkte als Mittelpunkt aus beschrieben werden kann. Einer unendlich kleinen Verschiebung der Stange aus ihrer horizontalen Lage entspricht daher eine Senkung des Schwerpunktes, die von der zweiten Ordnung unendlich klein ist. Damit ist das Gleichgewicht als labil erkannt.

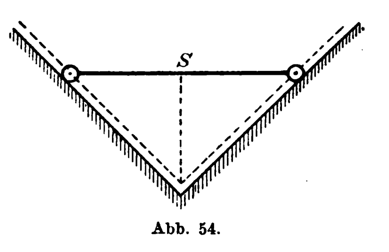


Abb. 54.

18. Aufgabe. Auf eine feste Kugelfläche vom Halbmesser R wird oben ein Körper gelegt, der eine ebene Unterfläche hat, so dass der Schwerpunkt senkrecht über dem Auflagerpunkte liegt. Wie hoch darf der Schwerpunkt liegen, ohne dass das Gleichgewicht labil wird?

Lösung. Für eine kugelförmige Begrenzung des oben aufgelegten Körpers fanden wir in § 28 die dem indifferenten Gleichgewichte entsprechende Höhe x des Schwerpunktes
$$x = \frac{Rr}{R+r}.$$
Setzt man hierin $r = \infty$, so verschwindet im Nenner R gegen r und man kann den Factor r in Zähler und Nenner wegheben. Daraus folgt $x = R$. Das Gleichgewicht ist stabil, wenn x kleiner als R ist. — Man kann auch die frühere Betrachtung für den hier vorliegenden speciellen Fall ohne Schwierigkeit wiederholen.

19. Aufgabe. Ein Eisenbahnwagen von 10000 kg Gewicht hat 4 Räder, die näherungsweise als blosse kreisförmige Reifen von zusammen 1000 kg Gewicht angesehen werden sollen. Um wie viel

wird die Masse des Eisenbahnwagens wegen der Rotation der Räder scheinbar bei der Fahrt erhöht?

Lösung. Der Wagenkasten führt eine Translation aus; die Bewegung der Räder lässt sich in die gleiche Translation und in die Drehung um den Schwerpunkt zerlegen. Für die Rotationsenergie der Räder hat man

$$L_r = \frac{1}{2} u^2 \Theta = \frac{1}{2} u^2 M r^2,$$

denn bei einem Reifen hat jedes Massentheilchen denselben Abstand r vom Schwerpunkte. Die Translationsenergie der Räder ist

$$L_t = \frac{1}{2} M v^2.$$

Zwischen u und v besteht die Gleichung $v = ur$, denn der grade auf den Schienen aufsitzende Theil des Radumfangs muss sich in Folge der Rotation u um ebenso viel rückwärts als in Folge der Translation v vorwärts bewegen, wenn nur Rollen und kein Gleiten der Räder auf den Schienen vorkommen soll.

Hiernach ist im vorliegenden Falle

$$L_r = L_t.$$

Zur gesammten lebendigen Kraft des Wagens tragen demnach die Radreifen so viel bei, als wenn sie doppelt so viel Masse hätten und nur die Translation mitmachten. Will man daher den Eisenbahnwagen zur Berechnung der lebendigen Kraft als materiellen Punkt behandeln, so ist die Masse der Radreifen doppelt zu zählen; d. h. die Masse des Wagens ist scheinbar um 1000 kg erhöht.

20. Aufgabe. Auf einen centrisch gelagerten homogenen Cylinder von 40 cm Durchmesser und 2000 kg Gewicht wirkt ein statisches Moment von 10 mkg. Wie lange dauert es, bis der Cylinder eine Winkelgeschwindigkeit von 120 Touren in der Minute angenommen hat?

Lösung. Wir berechnen zunächst das Trägheitsmoment Θ des Cylinders für die Cylinderaxe. Man denke sich im Querschnitte des Cylinders zwei Kreise mit den Halbmessern x und $x + dx$ eingetragen; alle dazwischen liegenden Massentheilchen haben den gleichen Abstand x von der Drehaxe (abgesehen von verschwindend kleinen Unterschieden, auf die es jetzt nicht ankommt). Bezeichnen wir die Länge des Cylinders mit l, den Halbmesser mit r, die specifische Masse mit μ, so ist die Gesammtmasse $M = \pi r^2 l \mu$ und die zwischen den beiden Kreisen liegende Masse gleich $2\pi x dx l \mu$. Der Beitrag dieser Masse zum Trägheitsmomente ist daher $2\pi x^3 dx l \mu$ und hiernach

$$\Theta = \int_0^r 2\pi x^3 dx l \mu = 2\pi l \mu \frac{r^4}{4} = M \frac{r^2}{2}.$$

Der quadratische Durchschnittswerth der Massenabstände von der Cylinderaxe ist hiernach $\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$. Man bezeichnet ihn als den Trägheitsradius; wäre die ganze Masse in diesem Abstande von der Drehaxe vereinigt, so bliebe das Trägheitsmoment ebenso gross, als es thatsächlich ist.

Die lebendige Kraft bei der Winkelgeschwindigkeit u ist

$$L = \frac{1}{2} u^2 \Theta = M \frac{u^2 r^2}{4}.$$

Nach Gleichung (81) ist aber

$$\Theta \frac{du}{dt} = Pp.$$

Da Pp constant sein sollte, trifft dies hiernach auch von der Winkelbeschleunigung $\frac{du}{dt}$ zu. Die Bewegung ist also eine gleichförmig beschleunigte Rotation. Für die Beschleunigung erhalten wir, wenn noch das Gewicht $Q = Mg$ eingeführt wird,

$$\frac{du}{dt} = \frac{Pp}{\Theta} = \frac{2Pp}{Mr^2} = \frac{2Ppg}{Qr^2} = \frac{2 \cdot 10 \text{ mkg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}}{2000 \text{ kg} \cdot 0{,}04 \text{ m}^2} = 2{,}45 \frac{1}{\text{sec}^2}.$$

Andererseits entspricht die Winkelgeschwindigkeit von 120 Touren pro Minute, die der Cylinder erlangen soll, dem in Bogenmaass ausgedrückten Werthe

$$u = 2 \text{ Touren pro sec} = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{\text{sec}} = 12{,}57 \frac{1}{\text{sec}}.$$

Die Zeit t, die verstreichen muss, bis diese Geschwindigkeit erreicht ist, folgt nun aus

$$2{,}45 \cdot t = 12{,}57 \quad \text{oder} \quad t = 5{,}13 \text{ sec}.$$

Vierter Abschnitt.

Energieumwandlungen.

---

§ 31. Berechnung des Schwungrades einer Dampfmaschine.

Durch die Einführung des Energiebegriffes haben die Naturwissenschaften im neunzehnten Jahrhundert die tiefgreifendsten Umwandlungen erfahren. Die Mechanik ist indessen davon am wenigsten berührt worden, obschon sie selbst den ersten Anstoss zur Aufstellung des Energiebegriffes gegeben hat. Thatsächlich war nämlich, als die neue Lehre kurz vor der Mitte des jetzt abgelaufenen Jahrhunderts aufgestellt wurde, die Mechanik bereits im Besitze aller Vorstellungen dieser Lehre, so weit sie sich nur auf rein mechanische Vorgänge beziehen. So stammt die Ueberzeugung von der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile schon aus dem vorhergehenden Jahrhunderte und Betrachtungen über die Umwandlung verschiedener mechanischer Energieformen in einander sind auch schon um viele Jahre der Entdeckung des mechanischen Wärmeäquivalents vorausgegangen. Durch diese Untersuchungen der Mechanik ist der Boden für die Aufstellung des Energieumwandlungsgesetzes erst vorbereitet worden.

Wenn aber auch durch die Einführung der energetischen Betrachtungen auf allen anderen Gebieten der Physik grössere Umwälzungen in der Mechanik nicht veranlasst wurden, so haben jene doch dazu geführt, dass man im Allgemeinen solche Sätze oder Formeln der Mechanik für die Lösung von Aufgaben bevorzugt, die mit dem Energiebegriffe unmittelbar

sammenhängen. Oft stehen nämlich verschiedene Wege zur
isung einer Aufgabe offen, die in ihren Ansprüchen an Zeit
d Mühe nicht viel von einander abweichen. So kann man
B. den Momentensatz oder das Princip der virtuellen Ge-
ıwindigkeiten oft mit gleichem Vortheile gebrauchen. Ge-
ihnlich gibt man aber dann dem Principe der virtuellen
schwindigkeiten den Vorzug, weil es unmittelbar von Energie-
össen handelt. Eine Behandlung der Mechanik, bei der man
sich angelegen sein lässt, alle nicht mit Energiegrössen im
glichst unmittelbaren Zusammenhange stehenden Sätze oder
trachtungen zu Gunsten der anderen thunlichst in den
ntergrund zu drängen, ist neuerdings oft empfohlen worden;
wird als die energetische bezeichnet. In einem folgenden
ragraphen werde ich auf diesen Punkt noch etwas näher
ıgehen.

Hier soll vor Allem die Untersuchung über die Arbeits-
fspeicherung im Schwungrade der Dampfmaschine — oder
erhaupt einer Kraftmaschine mit periodisch wechselnder
beitsleistung — dargelegt werden, die einst vorbildlich für
e anderen energetischen Betrachtungen gewesen und die
ch heute noch von grösster praktischer Bedeutung ist.

Zur Umwandlung der hin- und hergehenden Bewegung
s Dampfkolbens in die rotirende Bewegung der Kurbelwelle
rwendet man gewöhnlich den Kurbelmechanismus mit Kurbel-
ınge, zuweilen auch die Kurbelschleife, bei der die Kurbel-
ınge fehlt oder, wie man auch sagen kann, durch eine An-
dnung ersetzt ist, die einer unendlich langen Kurbelstange
eichwerthig ist. Aber auch bei dem gewöhnlichen Kurbel-
echanismus pflegt man darauf zu achten, dass die Kurbel-
ınge ziemlich gross im Vergleiche zur Länge der Kurbel
lbst ist; gewöhnlich nimmt man die Kurbelstange nicht gern
eniger als etwa 5 mal so lang als die Kurbel. Je grösser
eses Verhältniss ist, desto mehr nähert sich das Verhalten
s Kurbelmechanismus dem einer Kurbelschleife oder dem
ies Kurbelmechanismus mit unendlich langer Kurbelstange.
ir diesen besonderen Fall werden alle Rechnungen über den

Kurbelmechanismus am einfachsten, und sehr häufig begnügt man sich damit, die unter der Voraussetzung unendlich langer Kurbelstangen abgeleiteten Formeln näherungsweise auch auf den gewöhnlichen Kurbelmechanismus anzuwenden. Immer darf zwar der Fehler, den man damit begeht, nicht vernachlässigt werden. Jedenfalls ist es aber am besten, wenn man sich mit diesen Untersuchungen zuerst einmal unter Voraussetzung des einfachsten Falles vertraut macht. Wenn dies geschehen ist, steht nachher nichts im Wege, die Rechnungen auf den allgemeineren Fall zu übertragen.

Die augenblickliche Stellung des in Abb. 55 gezeichneten Kurbelmechanismus wird am einfachsten durch die Angabe des Winkels φ beschrieben, den die Kurbelrichtung mit der

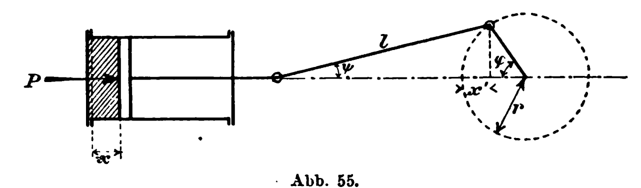


Abb. 55.

Cylinderaxe bildet. Wir wollen annehmen, dass die Maschine so umläuft, dass der Winkel φ mit der Zeit zunimmt. Die Winkelgeschwindigkeit der Kurbelwelle kann in erster Annäherung als constant betrachtet werden, da ihre Schwankungen durch die Anwendung des Schwungrades in engen Grenzen gehalten werden.

Der Winkel ψ zwischen der Richtung der Kurbelstange und der Cylinderaxe folgt aus

$$\sin \psi = \sin \varphi \cdot \frac{r}{l}$$

und hieraus

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \frac{r^2}{l^2}}\,.$$

Da $\frac{r^2}{l^2}$ ein kleiner Bruch ist, kann man die Wurzel nach dem binomischen Satze entwickeln und sich darauf beschränken, die beiden ersten Glieder beizubehalten; man hat dann

$$\cos \psi = 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{2} \frac{r^2}{l^2}\,.$$

Um die Formeln noch weiter zu vereinfachen, genügt es für eine erste Annäherung $\cos\psi = 1$ zu setzen. Genau richtig wäre dies zwar nur für eine unendlich lange Kurbelstange; wenn $l = 5r$ ist, beträgt der Fehler aber höchstens 2 Procent.

Der Kolbenweg x von der äussersten Stellung, der sogenannten „Totpunktlage", aus ist gleich der Summe von l und r vermindert um die dritte Seite des durch beide Strecken gebildeten Dreiecks, also

$$x = l + r - l\cos\psi - r\cos\varphi$$

oder, mit $\cos\psi = 1$,

$$x = r - r\cos\varphi,$$

d. h. bei unendlich langer Kurbelstange ist der Kolbenweg gleich der Projection x' des Weges der Kurbelwarze auf die Cylinderaxe. Der im Zeitelemente dt beschriebene Kolbenweg dx folgt hieraus durch Differentiiren

$$dx = r\sin\varphi d\varphi = r\sin\varphi u dt,$$

wenn die nahezu constante Winkelgeschwindigkeit der Kurbelwelle mit u bezeichnet wird. Auf den Kolben wirkt der Dampfdruck P und die von ihm im Zeitelemente dt geleistete Arbeit ist gleich

$$Pdx = Prudt \cdot \sin\varphi.$$

Gleichen Zeittheilchen dt entspricht demnach eine wechselnde Arbeitsleistung, auch dann, wenn P constant ist, wegen des mit der Zeit veränderlichen Factors $\sin\varphi$. Andererseits wird aber von der Maschine eine constante Arbeitslieferung zum Antriebe der von ihr ausgehenden Transmission verlangt. Zu gewissen Zeiten, nämlich bei kleinen Werthen von $\sin\varphi$, reicht die Arbeit des Dampfes allein nicht aus, um die Bewegungswiderstände zu überwinden, während zu anderen Zeiten ein Ueberschuss von Arbeitsleistung des Dampfes zur Verfügung steht. Den Ausgleich bewirkt das Schwungrad, das während der Ueberschussperiode beschleunigt wird und die hierbei aufgespeicherte Energie während der darauf folgenden Periode der Minderleistung zur Ueberwindung der Bewegungswiderstände wieder abgibt.

Man muss vor allem berechnen, wie gross der Arbeitsbetrag ist, der abwechselnd im Schwungrade aufgespeichert und wieder daraus entnommen wird. Dieser hängt von dem Gesetze ab, nach dem sich der Dampfdruck P mit der Stellung φ des Mechanismus ändert, also von der Steuerung der Dampfmaschine, namentlich von dem Füllungsgrade. Bei den im „Viertakt" arbeitenden Gaskraftmaschinen wird von vier aufeinander folgenden Kolbenhüben (zwei Hin- und zwei Rückgängen) nur während eines Hubes eine positive Arbeit von P geleistet. Bei solchen Maschinen ist die von dem Schwungrade aufzunehmende Energie besonders gross. Jedenfalls ist die Berechnung dieses Energiebetrages unter Berücksichtigung der besonderen Einrichtung der Maschine durchzuführen. Hier kommt es aber nicht darauf an, eine specielle Theorie der einzelnen Maschinen zu geben, sondern nur die Methode im Allgemeinen auseinanderzusetzen. Es genügt daher, wenn an dem einfachsten Beispiele gezeigt wird, wie sich die Rechnung weiter gestaltet. Zu diesem Zwecke nehme ich an, dass die Maschine doppelwirkend ist, d. h. dass bei jedem Kolbenhube, sowohl vorwärts als rückwärts, dieselbe Arbeit des Dampfes geleistet wird und dass sie ferner mit voller Füllung arbeite, dass also P constant ist.

In diesem Falle ist die Arbeit des Dampfes für eine volle Umdrehung der Kurbelwelle gleich $4Pr$; die durchschnittliche Arbeit, die zur Ueberwindung aller Bewegungswiderstände zu Gebote steht, ist für eine Drehung um $d\varphi$ daher

$$4Pr\frac{d\varphi}{2\pi} \quad \text{oder} \quad 4Pr\frac{u\,dt}{2\pi}.$$

Wir finden die Kurbelstellung φ', bei der die Periode der Minderleistung in die Periode der Mehrleistung oder umgekehrt übergeht, wenn wir diesen durchschnittlichen Arbeitsbetrag dem während dt von dem Dampfe wirklich geleisteten gleichsetzen, also

$$Pru\,dt\sin\varphi' = 4Pr\frac{u\,dt}{2\pi}$$

und hieraus

$$\sin\varphi' = \frac{2}{\pi} \quad \text{oder} \quad \varphi' = 0{,}690 = 39^0\,22'$$

oder auch $\varphi' = 140^0\,38'$, $\varphi' = 219^0\,22'$, $\varphi' = 320^0\,38'$, wenn wir alle Stellungen während eines ganzen Umlaufes in Betracht ziehen.

Die Arbeit des Dampfes von $\varphi' = 39^0\,22'$ bis $\varphi' = 140^0\,38'$, also während einer Ueberschussperiode ist gleich $2\,Pr \cos \varphi'$ oder, wenn man den Werth von $\cos \varphi' = 0{,}771$ einsetzt, gleich $1{,}542\,Pr$. Die durchschnittliche Arbeitsleistung für eine Drehung um diesen Winkel ist aber nur

$$\frac{2\,Pr}{\pi}(\pi - 2\varphi') = 1{,}122\,Pr.$$

Der Unterschied zwischen beiden beträgt $0{,}42\,Pr$ und dies ist die im Schwungrade aufzuspeichernde Energie.

Auf ähnliche Art hat man auch für jede andere Art der Dampfzuführung diesen Arbeitsbetrag festzustellen; er soll jetzt, um die folgenden Rechnungen unabhängig von dem gewählten speciellen Beispiele zu machen, mit A bezeichnet werden.

Das Schwungrad hat die kleinste Winkelgeschwindigkeit u_{min} am Ende einer Periode der Minderleistung und die grösste u_{max} am Ende der Mehrleistung. Der Unterschied der lebendigen Kräfte für beide Geschwindigkeiten ist der aufzuspeichernden Arbeit A gleichzusetzen, also

$$A = \frac{1}{2}\,\Theta\left(u_{max}^2 - u_{min}^2\right).$$

Als Ungleichförmigkeitsgrad γ der Maschine wird das Verhältniss zwischen der Geschwindigkeitsschwankung $u_{max} - u_{min}$ und der durchschnittlichen Geschwindigkeit u bezeichnet; also

$$\gamma = \frac{u_{max} - u_{min}}{u}.$$

Da ferner $u = \dfrac{u_{max} + u_{min}}{2}$ gesetzt werden kann, geht die Gleichung für A über in

$$A = \gamma u^2 \Theta. \tag{82}$$

Der zulässige Ungleichförmigkeitsgrad hängt von dem Zwecke ab, für den die Maschine bestimmt ist. In manchen Fällen, z. B. beim Antriebe von Dynamomaschinen für elektrische Beleuchtung, muss γ sehr klein sein ($^1/_{100}$ oder noch weniger),

weil sich die Geschwindigkeitsschwankungen sonst störend bemerkbar machen würden; in anderen Fällen wird danach weniger gefragt und man kann sich dann mit einem kleineren Schwungrade begnügen. In jedem Falle ist γ als gegeben oder vorgeschrieben anzusehen. Da auch A schon berechnet ist und die Winkelgeschwindigkeit u der Construction der Maschine von vornherein zu Grunde gelegt ist, bildet das dem Schwungrade zu gebende Trägheitsmoment Θ die einzige Unbekannte in Gleichung (82).

§ 32. Der Massendruck des Dampfmaschinengestänges.

Bei den Berechnungen des vorausgehenden Paragraphen ist auf manche Umstände, die mit dem Gange einer Dampfmaschine zusammenhängen, noch keine Rücksicht genommen worden und es würde auch viel zu weit führen, wenn diese Fragen hier alle im Einzelnen besprochen werden sollten. Auf eine von ihnen, die namentlich bei schnell laufenden Dampfmaschinen von grosser Bedeutung ist, soll aber hier noch hingewiesen werden.

Stillschweigend wurde nämlich im vorigen Paragraphen die Masse des Gestänges, also der aus dem Kolben, der Kolbenstange, dem Kreuzkopfe und der Kurbelstange bestehenden beweglichen Theile des Kurbelmechanismus vernachlässigt. Denn darauf kommt es hinaus, wenn die von dem Dampfe geleistete Arbeit unmittelbar mit der durchschnittlichen Arbeitsleistung verglichen und der Unterschied zwischen beiden gleich der Arbeitsaufnahme oder -abgabe des Schwungrads gesetzt wird. Thatsächlich hat aber auch das Gestänge eine gewisse Masse und eine gewisse lebendige Kraft, die zwar viel kleiner, als die des Schwungrads, dafür aber viel stärkeren Schwankungen unterworfen ist. Es ist daher in vielen Fällen unzulässig, diesen Einfluss der Masse des Gestänges zu vernachlässigen und die Rechnungen des vorigen Paragraphen ohne jede Correctur anzuwenden. Eine wichtige Rolle spielt die im Gestänge aufgehäufte Energie namentlich

auch bei den Untersuchungen über den Leerlauf, bei dem die Arbeit des Dampfdruckes nur die inneren Bewegungswiderstände der Maschine zu überwinden hat. Die Arbeitsübertragung, die zwischen dem Gestänge und dem Schwungrade erforderlich ist, um die Umlaufszahl der Maschine auch beim Leerlaufe aufrecht zu erhalten, kann nämlich recht beträchtlich sein. Damit erklärt es sich, dass die zur Ueberwindung der inneren Bewegungswiderstände verbrauchte Arbeitsleistung beim Leerlaufe oft kaum oder nur wenig kleiner ist, als bei belasteter Maschine.

Zur Berücksichtigung der Masse und der lebendigen Kraft des Gestänges kann man zwei Wege einschlagen. Im ersten Falle drückt man die lebendige Kraft als Function der Kolbenstellung x oder der Kurbelstellung φ aus und schlägt sie der lebendigen Kraft des Schwungrades zu, worauf im Uebrigen an der früheren Betrachtung nichts weiter geändert zu werden braucht; im zweiten Falle berechnet man dagegen jenen Antheil des Dampfdruckes P, der dazu verbraucht wird, das Gestänge zu beschleunigen bezw. den durch die Verzögerung des Gestänges bedingten Zuwachs von P und rechnet weiterhin so, als wenn das Gestänge ohne Masse, der Dampfdruck P aber entsprechend niedriger oder höher wäre. In der Regel ist dieses letzte Verfahren am bequemsten und es soll daher auch hier befolgt werden. — Aus der Gleichung des vorigen Paragraphen

$$x = r - r \cos \varphi$$

folgt durch Differentiation

$$\frac{dx}{dt} = r \sin \varphi \dot{u}$$

und durch nochmaliges Differentiiren

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r \cos \varphi u^2.$$

Dies ist ohne Weiteres die Beschleunigung der nur gradlinig hin- und hergehenden Theile. Bei der Kurbelstange kommt allerdings noch eine Beschleunigungscomponente in der zu x senkrechten Richtung hinzu, die für die einzelnen

Punkte der Stange von verschiedener Grösse ist. Um die senkrecht zur Richtung von P stehenden Kräfte, die überdies viel kleiner sind als die anderen, brauchen wir uns aber jetzt nicht zu kümmern. Bezeichnen wir die Masse des Gestänges mit M, so haben wir für den bei positivem Vorzeichen zur Beschleunigung des Gestänges aufzuwendenden Antheil des Dampfdruckes P oder bei negativem Vorzeichen für die im gleichen Sinne mit P vom Gestänge ausgehende Kraft den Ausdruck

$$Mr \cos \varphi u^2.$$

Diese Kraft wird als der „Massendruck“ des Gestänges bezeichnet. Der Massendruck wird zu Null in der Mitte des Hubs, und er wird am grössten in den Totpunktlagen, wo $\varphi = 0$ oder $= \pi$ wird; der grösste Werth ist

$$Mru^2,$$

d. h. genau so gross wie die Centrifugalkraft, wenn man sich die ganze Masse des Gestänges an der Kurbelwarze vereinigt denkt. In allen Zwischenlagen ist der Massendruck proportional mit $\cos \varphi$, also proportional mit der Horizontalprojection der Kurbel.

Am anschaulichsten stellt man den Einfluss des Massendrucks durch ein Diagramm, wie in Abb. 56, dar. Bei voller Füllung hat der Dampfdruck P bei jeder Kolbenstellung denselben Werth; trägt man also P als Ordinate zur Abscisse x ab, so erhält man ein Rechteck. Im Anfange des Hubes ist der Massendruck von dem Dampfdrucke in Abzug zu bringen und am Ende des Hubes geht der Massendruck im gleichen Sinne mit P. Man erhält so durch Abtragen von Mu^2r das in Abb. 56 gezeichnete Trapez. Weiterhin kann nun das Gestänge als masselos betrachtet werden, wenn man nur die Ordinate des Trapezes als den zu jeder Kolbenstellung gehörigen Dampf-

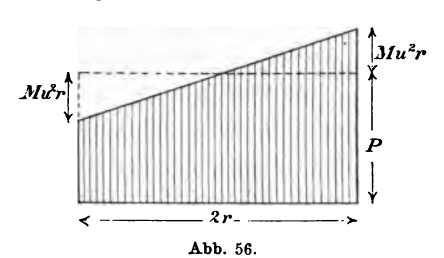


Abb. 56.

druck betrachtet. Da der Massendruck von dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit u abhängig ist, tritt er besonders bei sehr schnell umlaufenden Maschinen hervor.

Bei einem anderen Dampfvertheilungsgesetze ist natürlich ganz ähnlich zu verfahren; im Anfange des Hubes wirkt der Massendruck in der Grösse Mu^2r dem Dampfdrucke entgegen und bei jeder anderen Stellung ist er der Entfernung von der Mittellage proportional.

Es steht auch gar nichts im Wege, die in der Voraussetzung einer unendlich langen Kolbenstange liegende Vernachlässigung fallen zu lassen und nach der im Eingange dieses Paragraphen angegebenen genaueren Formel für x zu rechnen. Die Rechnungen werden dann nur etwas länger, bieten aber sonst keinerlei Schwierigkeiten. Nur die eine Bemerkung möge hier noch Platz finden, dass die beste Methode zur genaueren Berechnung aller Erscheinungen, die mit dem Kurbelmechanismus und mit den bei dem Betriebe einer Dampfmaschine vorkommenden schwingenden Bewegungen zusammenhängen, in der Entwicklung aller Grössen nach Fourier'schen Reihen besteht, die nach den Cosinus der Vielfachen des Winkels φ fortschreiten. Die Theorie der Fourier'schen Reihen wird aber erst in den mathematischen Vorlesungen des zweiten Studienjahres entwickelt und ich kann sie daher hier noch nicht als bekannt voraussetzen.

§ 33. **Die Energieströme.**

Die vorausgehenden Betrachtungen haben uns schon dazu geführt, die Aufspeicherung der mechanischen Energie im Schwungrade und im Gestänge und überhaupt das Wandern der Energie zwischen den einzelnen Theilen der Maschine, wie es namentlich beim Leerlaufe der Maschine zwischen dem Schwungrade und dem Gestänge deutlich hervortritt, näher ins Auge zu fassen. Sobald man sich mit diesen Betrachtungen näher vertraut gemacht hat, liegt es nahe, dem Verbleibe der Energie in ähnlicher Weise nachzuspüren, wie den

Bewegungen einer körperlichen Substanz. In der That wird auch von den Vertretern der neueren energetischen Betrachtungsweisen die Energie gradezu als eine Substanz bezeichnet. Unter einer Substanz versteht man nämlich das, was bei allem Wechsel beständig bleibt und dieses Merkmal trifft für die Energie nach dem Gesetze ihrer Erhaltung vollständig zu; man darf sich nur nicht auf die mechanische Energie beschränken, sondern muss alle Formen, unter denen die Energie auftritt, dabei in Betracht ziehen.

Im Bereiche der gewöhnlichen Mechanik treten drei Arten der Energie auf, die kinetische Energie oder lebendige Kraft bewegter Massen, die potentielle Energie der Schwere und die in Gestalt von Formänderungsarbeit elastischer Körper aufgespeicherte potentielle Energie. Die Arbeit einer Kraft ist nicht als eine besondere Energieform zu betrachten. Sie kommt nur bei der Uebertragung der Energie von einem Körper auf einen anderen oder bei der Umwandlung einer Energieform in eine andere vor. Grade deshalb dient aber die geleistete Arbeit als das Maass der übergegangenen Energie und aller Energiegrössen überhaupt. So wird auch die Wärme mit Hülfe des mechanischen Wärmeäquivalents auf eine Arbeitsgrösse umgerechnet und auch die elektrische und die magnetische Energie werden in letzter Linie in diesem gemeinsamen Maasse aller Energiearten ausgedrückt.

Mit der Masse theilt übrigens die Energie ganz allgemein auch die Eigenschaft, dass sie eine Grösse ohne Richtung ist. Ein dahinfliegendes Geschoss hat zwar eine gewisse kinetische Energie und zugleich eine gewisse Richtung. Es wäre aber irrthümlich, wenn man der Energie selbst aus diesem Grunde eine Richtung zuschreiben wollte. Gerichtet ist bei dem Geschosse die Bewegungsgrösse $m\mathfrak{v}$; die Energie wird daraus durch innere geometrische Multiplication mit $\frac{\mathfrak{v}}{2}$ gefunden und das innere Product ist eine richtungslose Grösse.

Anders ist es mit dem Energiestrome; bei diesem geben wir nicht nur an, wie viel Energie in einem gegebenen Augen-

blicke irgendwo enthalten ist, sondern auch, nach welcher Richtung hin sich diese an sich richtungslose Grösse überträgt. Es ist damit grade, wie mit dem Strome einer Wassermenge. Die Masse des Wassers ist an sich eine richtungslose Grösse; sobald wir aber angeben, wohin sie sich bewegt, gelangen wir zu dem neuen Begriffe der gerichteten Wasserströmung.

Es ist bisher noch nicht gelungen, eine einwandfreie kurze Definition des Energiebegriffes zu geben. Man begnügt sich desshalb gewöhnlich damit, die aus der Experimentalphysik allgemein bekannten Energieformen als Beispiele anzuführen und dann zu sagen, dass Alles Energie ist, was sich in eine dieser Formen nach einem festen Verhältnisse umwandeln lässt, ohne solche Umwandlung aber unveränderlich ist. Ein Nachtheil ist übrigens in dem Fehlen einer kurzen und bündigen Definition des Energiebegriffes kaum zu erblicken. Auch eine ganz einwandfreie Definition der körperlichen Substanz dürfte noch Niemand gelungen sein. Wir vereinigen in dem Begriffe des Körpers nur eine grosse Reihe verschiedener Erfahrungen unter einem einheitlichen Bilde und ähnlich ist es auch mit dem Begriffe der Energie.

Eine bemerkenswerthe Eigenschaft aller uns bis jetzt näher bekannten Energieformen besteht darin, dass sich der Werth der Energie als ein Product aus zwei Factoren darstellen lässt. Beide Factoren stehen sich oft in ausgesprochener Weise derart gegenüber, dass der eine Factor als der Quantitäts-, der andere als der Intensitätsfactor bezeichnet werden kann. Zu einer solchen Unterscheidung wird man z. B. bei der Wärme ohne Weiteres geführt. Die in einem Körper enthaltene Wärmemenge kann zunächst als das Product aus der Wärmecapacität und der Temperatur dargestellt werden. Anstatt dessen lässt sie sich auch als Product der Temperatur und der „Entropie" auffassen. Grade diese Factorenzerlegung wird von den Vertretern der heutigen Energetik bevorzugt. Die Entropie ist dabei eine Grösse, die ihre genauere Definition in der mechanischen Wärmetheorie erhält, worauf hier

nicht einzugehen ist. Jedenfalls ist sie, wie man aus der Gegenüberstellung bereits erkennt, eine Grösse von derselben Dimension wie eine Wärme-Capacität. Die Temperatur bezeichnet man als den Intensitätsfactor dieser Producte, weil der Wärmeübergang zwischen zwei sich berührenden Körpern von ihm abhängt. Bei gleichem Intensitätsfactor findet kein Energieübergang zwischen den in Wechselwirkung miteinander stehenden Körpern statt. Der Quantitätsfactor, also in unserem Falle entweder die Entropie oder die Wärmecapacität, kommt dabei nicht in Betracht.

Diese Zergliederung der Energiegrössen in zwei Factoren von ausgeprägter Eigenart gehört erst der neueren Forschung an und sie hat bisher noch nicht zu einer allgemein anerkannten Eintheilung für alle verschiedenen Energieformen geführt. Man kann in manchen Fällen, namentlich bei den rein mechanischen Energieformen, im Zweifel darüber sein, welche Factorenzerlegung und welche Vertheilung der beiden Bezeichnungen auf die Factoren die angemessene ist. Immerhin verspricht diese Betrachtung noch manche wichtige Aufschlüsse und es mag sein, dass sie bei weiterer Ausgestaltung zu einem werthvollen Hülfsmittel unserer Naturbeschreibung wird; aus diesem Grunde glaubte ich hier wenigstens flüchtig darauf eingehen zu sollen.

Wenn ein Stein vom Gewichte Q auf die Höhe h gehoben wird, wendet man eine Arbeit Qh auf, die nun als potentielle Energie der Schwere, d. h. als die Energie der Lage des Steines zur Erde aufgespeichert ist. Man kann diese Energie sofort wieder in anderer Form, etwa als kinetische Energie zurückgewinnen, indem man den Stein aus der von ihm erreichten Höhe herabfallen lässt. Die Energie der Lage — oder strenger des Lagenunterschiedes — wird also durch Qh gemessen. Die Entscheidung darüber, welchen von beiden Factoren man als den Intensitätsfactor ansehen soll, ist in diesem Falle zweifelhaft. Man könnte sich etwa das Gewicht Q mit Hilfe eines Seils, das über eine Rolle geht, in Wechselwirkung mit einem anderen Gewichte gesetzt denken. Ein

Energieübergang findet dann nicht statt, wenn beide Gewichte gleich sind. Bei dieser Betrachtungsweise wäre daher Q der Intensitätsfactor. Man kann sich aber auch beide Gewichte in der Art miteinander verbunden denken, dass sie sich auf gleiche Höhen zu bringen suchen. Dann würde kein Energieübergang zwischen ihnen stattfinden, wenn h gleich wäre und dieser Factor wäre als der Intensitätsfactor zu betrachten.

Bei der Formänderungsarbeit, die etwa in einer gespannten Feder aufgespeichert ist, kommt es auf die Zusammendrückung an, die die Feder erfuhr und auf die Kraft, mit der sie gespannt ist. Die Kraft wächst mit der Zusammendrückung allmählich und im gleichen Verhältnisse an; bei der Berechnung der geleisteten Arbeit ist daher nur der Mittelwerth $\frac{Q}{2}$ für den ganzen Weg h in Rechnung zu stellen, wenn Q die zuletzt erreichte Anspannung bedeutet. Die potentielle Energie der gespannten Feder ist demnach gleich $\frac{Qh}{2}$. Die kinetische Energie eines bewegten materiellen Punktes kann entweder, wie schon vorher, in die Factoren $m\mathfrak{v}$ und $\frac{\mathfrak{v}}{2}$ oder auch in die Factoren m und $\frac{v^2}{2}$ zerlegt werden und es erscheint auch hier wieder zweifelhaft, welcher Zerlegung man den Vorzug geben soll.

In der Mechanik hat man, wie schon erwähnt, nur mit den drei hier angeführten Energiearten zu thun. Sobald man auch die übrigen Energieformen mit in Betracht zieht, erweitert sich die Mechanik zur theoretischen Physik. Da aber die Mechanik die Grundlage der theoretischen Physik bildet, ist es nützlich, gelegentlich auch hier schon einen Ausblick auf das weitere Gebiet zu werfen.

Wenn wir nun die Wanderung der Energie verfolgen und uns dabei auf rein mechanische Vorgänge beschränken, so haben wir auch hier drei verschiedene Arten der Energieübertragung ins Auge zu fassen. Ein bewegter Körper nimmt die lebendige Kraft, die er besitzt, mit sich und dadurch verschiebt sich die Energie gegen den festen Raum. Man kann

diesen Energiestrom als einen Mitführungs- oder Convectionsstrom bezeichnen.

Eine andere Art der Energieübertragung ist die durch einen Spannungszustand vermittelte. In einer Druckwasserleitung z. B., mit deren Hülfe Motoren, hydraulische Aufzüge u. dgl. betrieben werden, wird die am Anfange der Leitung an den Pumpen geleistete mechanische Arbeit dem Wasserstrome entlang nach der Verbrauchsstelle übertragen. Auch hier muss eine Bewegung eintreten, damit der Energiestrom erfolgen kann. Ein Convectionsstrom liegt aber trotzdem nicht vor. Man denke sich nämlich für den Augenblick eine Ruhepause, das Wasser in der Leitung etwa ohne Spannung. Sobald wir jetzt am Anfange die Pumpen arbeiten lassen, wird die diesen zugeführte Energie zunächst dem Rohre entlang geführt und hier in Formänderungsarbeit des sich elastisch dehnenden Rohres und auch des etwas compressiblen Wassers verwandelt. Nachdem der erforderliche Spannungszustand erreicht ist, was gewöhnlich sehr schnell geschehen sein wird — etwas länger würde es dauern, wenn irgendwo ein Windkessel eingeschaltet wäre — kann die Arbeit am Ende der Leitung abgenommen werden. Während dieser Zeit hat sich nur ein geringes Wasserquantum in der Leitung verschoben; die am Anfange der Druckleitung zugeführte Energie hat aber schon den ganzen Weg zurückgelegt. Die Energie bewegt sich also hier nicht so, als wenn sie an die einzelnen Wassertheilchen gebunden wäre und mit diesen, sondern sie eilt dem sie übertragenden Körper weit voraus. Diese Art der Energieübertragung sei als eine Leitungsströmung bezeichnet. Diese Bezeichnung empfiehlt sich namentlich deshalb, weil sie an die Energieübertragung durch einen elektrischen Strom erinnert, bei dem die Energie ebenfalls längs des stromführenden Drahtes fortgeleitet wird.

Neben dieser Leitungsströmung der Energie geht freilich zugleich ein Convectionsstrom vor sich, der aber von jenem wohl zu unterscheiden ist. Trägt man z. B. eine gespannte Feder, etwa die in einer Taschenuhr, mit sich fort, so trans-

portirt man mit ihr zusammen auch die in ihr aufgespeicherte Energie und diese Energiewanderung bildet offenbar einen Convectionsstrom. So ist auch das Wasser in der Druckwasserleitung ähnlich einer Feder etwas zusammengedrückt und es besitzt eine gewisse Formänderungsenergie, die es beim Fliessen durch die Leitung mit sich führt. Dieser Theil der ganzen Energieströmung ist freilich ein Convectionsstrom; er ist aber ganz unerheblich gegenüber der durch den Spannungszustand längs der Wassermasse fortgeleiteten Energie.

Auch durch ein Seil, mit dessen Hülfe man einen Gegenstand unter Ueberwindung irgend eines Widerstandes fortzieht, geht ein Energiestrom und es ist sehr zu beachten, dass hier die Strömungsrichtung der Bewegungsrichtung des Seiles entgegengesetzt ist. Ein Convectionsstrom läuft auch hier daneben her, indem jedes Seilstück die ihm durch die Anspannung verliehene potentielle Energie mit sich führt und der Convectionsstrom ist natürlich mit der Bewegung des Seiles gleich gerichtet. Der Leitungsstrom ist aber im Allgemeinen viel stärker und verfolgt die entgegengesetzte Richtung.

Bei einem Riemen, durch den die Energie von einer Welle auf eine andere übertragen wird, ist das eine Riemenstück stärker gespannt als das andere. Entgegengesetzt der Bewegung leitet jedes der beiden Riemenstücke einen Energiestrom, die aber der verschiedenen Riemenspannung wegen verschieden gross sind. Die der getriebenen Welle im Ganzen zugeführte Energie ist gleich dem Unterschiede zwischen beiden Strömen.

Eine Transmissionswelle ist dazu bestimmt, Energie ihrer Längsrichtung nach fortzuleiten und überhaupt sind die Transmissionseinrichtungen einer Werkstätte mit ihren Ausrückvorrichtungen u. s. f. als Energieleitungen mit Schaltvorrichtungen zu betrachten, die ganz analog den Drahtleitungen und Ausschaltern einer elektrischen Transmission sind. Der Unterschied besteht nur darin, dass im letzten Falle die Energie nicht durch einen Spannungszustand und eine Bewegung sichtbarer oder wägbarer Massen, sondern durch einen

Vorgang innerhalb des Aethers erfolgt, der anscheinend jenem bei der mechanischen Transmission der Energie verwandt, bisher aber noch nicht in allen Einzelheiten genau erkannt ist.

Der Spannungszustand in der Transmissionswelle äussert sich in einer Verdrehung. Auch mit ihm ist zunächst ein Convectionsstrom der potentiellen Energie der Welle verbunden, der in geschlossenen kreisförmigen Bahnen verläuft. Daneben tritt aber ein weit grösserer Energiestrom auf, der in der Längsrichtung der Welle fortgeleitet wird. Man kann hier auch nach der Vertheilung des Energiestroms über den Querschnitt der Welle fragen. Die äusseren Theile des Wellenquerschnitts sind am stärksten gespannt und sie besitzen auch die grösste Geschwindigkeit. Aus beiden Gründen ist die Dichte des Energiestroms in den Umfangsschichten der Welle am grössten und nimmt von da aus nach der Mitte hin ab, wo sie zu Null wird.

Wenn eine Welle von einer anderen mit Hülfe von Zahnrädern angetrieben wird, leitet zunächst die antreibende Welle die Energie bis zum Zahnrade. Von da wird sie durch die Arme des Zahnrades nach aussen zum Zahnkranze geleitet und sie tritt an der Berührungsstelle der Zähne zum anderen Rade über, von wo sie nun in gleicher Weise auf die getriebene Welle weiterströmt.

Obschon wir uns jetzt auf die Energieübertragung bei rein mechanischen Vorgängen beschränken wollten, müssen wir doch darauf achten, dass überall, wo Reibung auftritt, ein Theil der zugeführten Energie zu deren Ueberwindung verbraucht wird. Der Strom der mechanischen Energie erlischt an diesen Stellen; wir wissen zwar, dass dafür Wärmeenergie entwickelt wird, brauchen uns aber um diese zunächst nicht weiter zu kümmern.

Die dritte Art der Energieübertragung neben der Convectionsströmung und der Leitungsströmung ist die durch Fernkräfte, also namentlich durch die Schwerkraft, vermittelt. Wir kennen zwar die Wirkungsgesetze der Schwere; wie die Schwerkraft zu Stande kommt, ob durch unmittelbare Ueber-

millionfache davon und nennt dieses ein Joule. Ein Energiestrom, durch den in jeder Secunde 1 Joule übertragen wird, heisst ein Watt und das Tausendfache hiervon ein Kilowatt. Nach diesen Bemerkungen wird die folgende Tabelle ohne Weiteres verständlich sein. Die Umrechnungen beziehen sich auf einen Ort der Erde, an dem $g = 9{,}81$ m/sec² ist.

Zusammenstellung
der physikalischen und technischen Maasseinheiten.

Grösse	Technisch	Physikalisch
Kraft	1 kg = 981000 dyn	1 dyn
Energie	1 mkg = $981 \cdot 10^5$ erg = 9,81 Joule	1 Joule = 10^7 erg
Energiestrom	1 PS = $75 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$ = $735{,}7 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}$ = 735,7 Watt = 0,7357 Kilowatt	1 Watt = $10^7 \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$ = $1 \frac{\text{Joule}}{\text{sec}}$ 1 Kilowatt = 1000 Watt = $10^{10} \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$

Aufgaben.

21. Aufgabe. Wie gross ist die potentielle Energie einer gespannten Feder, die unter einer Last von 1000 kg um 10 cm nachgibt, ohne dass die Elasticitätsgrenze überschritten wird? Wie lange reicht die in ihr aufgespeicherte Energie aus, um eine kleine Maschine zu treiben, wenn dazu der hundertste Theil einer Pferdestärke genügt?

Lösung. Während des Spannens der Feder legt der Angriffspunkt der Kraft einen Weg von 10 cm zurück und die Kraft wächst dabei im gleichen Verhältnisse mit dem Wege von 0 bis 1000 kg an. Der Durchschnittswerth der Kraft für den ganzen Weg ist daher 500 kg und die geleistete Arbeit, die in der Feder aufgespeichert wird, beträgt 50 mkg. Zum Treiben der Maschine reicht diese Energie aus für eine Zeit von

$$\frac{50 \text{ mkg}}{0{,}01 \cdot 75 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}}} = 66\tfrac{2}{3} \text{ sec.}$$

22. *Aufgabe. Wie gross ist der Energiestrom in einer unter 50 atm Ueberdruck stehenden Wasserleitung, wenn durch jeden Querschnitt in der Secunde 10 Liter Wasser fliessen?*

Lösung. Wir berechnen zunächst, wie viel Nutzarbeit an der Pumpe aufgewendet werden muss, um 1 Liter Wasser in die Leitung hineinzutreiben. Der Querschnitt des Pumpenkolbens sei F, der Druck in Atmosphären in der Leitung (die Atmosphäre zu 1 kg auf 1 qcm gerechnet) sei p, dann ist die Kraft, mit der der Pumpenkolben niedergedrückt werden muss, gleich Fp und die für einen Kolbenweg h aufgewendete Arbeit gleich Fph. Das Product Fh gibt aber das in die Leitung eingepresste Wasservolumen V an und die dafür aufgewendete Arbeit kann daher auch Vp geschrieben werden. Für $V = 1000$ ccm und $p = 50$ atm wird die Arbeit

$$1000 \text{ cm}^3 \cdot 50 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 50000 \text{ cmkg} = 500 \text{ mkg}.$$

Der Energiestrom in der Leitung beträgt hiernach $5000 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$ oder $66\frac{2}{3}$ PS.

Fünfter Abschnitt.

Die Reibung.

---

§ 34. Die gleitende Reibung.

Schwieriger als fast alle anderen Erscheinungen, mit denen sich die Mechanik beschäftigt, fügt sich die Reibung einer einfachen, gesetzmässigen Darstellung. Ueberall, wo es auf den genauen Werth der in einem gegebenen Falle zu erwartenden Reibung ankommt, ist man darauf angewiesen, auf Versuchsergebnisse zurückzugreifen, die unter ganz ähnlich liegenden Verhältnissen erhalten wurden oder, wenn solche nicht vorliegen, selbst Versuche anzustellen. Die Aufgabe der Mechanik besteht nun grade darin, die mit viel Mühe, Zeit- und Kostenaufwand verbundene Anstellung von Versuchen zur Entscheidung jedes Einzelfalles oder das Nachforschen in den zahlreichen Beschreibungen ausgeführter Versuche, wobei es auf die Würdigung aller näheren Umstände ankommt, die auf den Erfolg von Einfluss sein konnten, nach Möglichkeit zu vermeiden. Auf dem Gebiete der Reibung ist aber diese Aufgabe der Mechanik trotz vieler Bemühungen bisher nur unzulänglich gelöst worden, und es besteht auch leider wenig Hoffnung, dass die Lehre von der Reibung jemals so abgerundet in der Form und so zuverlässig in Bezug auf die Resultate, also in so engem Anschlusse an die Wirklichkeit dargestellt werden könnte, als die meisten übrigen Lehren der Mechanik.

Indessen beziehen sich diese Bemerkungen eigentlich nur auf den genauen Werth der Reibung. Eine Reihe von Betrach-

tungen, die für die Beurtheilung der Reibungserscheinungen von grossem Werthe sind, steht immerhin zur Verfügung, und wenn es sich, wie gewöhnlich, nur um eine Abschätzung handelt, reicht das, was man heute über die Reibung sagen kann, in der Regel aus. Ueberdies muss man auch dann, wenn man sich dazu entschliesst, wegen der Wichtigkeit des Falles, mit dem man grade zu thun hat, besondere Versuche zur Ermittelung des Einflusses der Reibung anzustellen, mit Allem schon vorher genau vertraut sein, was als bereits festgestellt gelten kann oder was wenigstens als wahrscheinlich in Aussicht zu nehmen ist. Im anderen Falle wäre kaum auf eine richtige Deutung und Verwerthung der Versuchsergebnisse zu rechnen. Deshalb bildet die Lehre von der Reibung trotz ihres Mangels an Vollständigkeit und Genauigkeit immerhin ein wichtiges Capitel der Mechanik.

Wenn sich zwei Körper berühren, wird im Allgemeinen an der Berührungsstelle eine Kraft zwischen ihnen übertragen, die schief zur Berührungsnormalen steht. Zerlegt man diese Kraft in zwei Componenten, von denen eine in der Richtung der Normalen geht, während die andere senkrecht dazu steht, so heisst die letzte Componente die Reibung. Es macht dabei zunächst keinen Unterschied, ob sich die Körper gegeneinander bewegen oder ob sie relativ zu einander in Ruhe sind. Eine unzweideutige Definition für die Reibung ist damit wenigstens gewonnen.

Die Hauptfrage, die sich jetzt erhebt, bezieht sich auf die Grösse und auf die Richtung der Reibung. Die Richtung ist nämlich bisher nur insofern bestimmt, als sie rechtwinklig zur Normalen ist; dagegen bleibt im Zweifel, welche Richtung die Reibung in der Berührungsfläche selbst einnimmt.

Hier kommen uns nun zwei Sätze zu Hülfe, die als gut bestätigt gelten können. Der erste Satz sagt aus, dass die Reibung immer nur in solcher Grösse auftritt, als erforderlich ist, um ein Gleiten der Körper gegeneinander zu verhüten, dass sie aber über einen gewissen Maximalwerth hinaus nicht steigen kann. Wenn also ohne Ueberschreitung dieses Maximal-

werths ein relatives Gleichgewicht beider Körper gegeneinander durch die Reibung hergestellt werden kann, besteht auch in der That Gleichgewicht; dagegen nimmt die Reibung immer dann, wenn sich die Körper gegeneinander bewegen, den grössten unter den gegebenen Umständen möglichen Werth an. Der zweite Satz lehrt uns, dass der Maximalwerth der Reibung in erster Linie von der Grösse des Normaldrucks zwischen den Körperoberflächen abhängt. Die Reibung — wenn nichts Anderes gesagt wird, ist darunter immer der Maximalwerth zu verstehen, den sie anzunehmen vermag — steigt mit dem Normaldrucke und in der Regel (abgesehen von dem auf S. 228 besprochenen Falle) ziemlich genau proportional mit ihm. Abweichungen von dieser Regel treten zwar gelegentlich auf, wenn der Druck entweder sehr klein oder auch, wenn er sehr gross wird; im letzten Falle namentlich dann, wenn der Druck so gross ist, dass bleibende Formänderungen der Körper dadurch veranlasst werden. Gewöhnlich kann man die Reibung aber mit hinreichender Genauigkeit proportional dem Normaldrucke setzen. Bezeichnet man also den Normaldruck mit N und den Grösstwerth der mit ihm verträglichen Reibung mit F, so hat man

$$F = fN, \tag{83}$$

wobei f ein Zahlenfactor ist, den man den Reibungscoefficienten nennt. Die Anwendung von Gl. (83) ist so zu verstehen, dass sich beide Körper entweder in einer ebenen Fläche berühren, in welchem Falle unter N der ganze in dieser Fläche übertragene Normaldruck verstanden werden kann oder, dass sich bei der Berührung in einer gekrümmten Fläche N und F nur auf ein Element der Berührungsfläche beziehen, das klein genug ist, um es als eben betrachten zu können.

Wenn die Körper aufeinander gleiten, nimmt die Reibung den grössten, durch Gl. (83) gegebenen Werth und jene Richtung an, die der Bewegung jedes Körpers an der Berührungsstelle relativ zum andern entgegengesetzt ist. Für diesen Fall ist auch die Richtung der Reibung sofort gegeben. Wenn die

Körper an der Berührungsstelle in Ruhe gegeneinander sind, kann die Richtung der Reibung im Allgemeinen nicht angegeben werden. Für die Untersuchung solcher Fälle reicht aber der Grundsatz gewöhnlich aus, dass das Gleichgewicht stets gesichert ist, wenn sich durch Reibungen von passend gewählter Richtung und Grösse, falls sie nur unter dem Maximalwerthe bleiben, Gleichgewicht mit den gegebenen Kräften herstellen lässt.

Falls man genau weiss, wie gross der Reibungscoefficient f in einem bestimmten Falle ist, steht hiernach der Berechnung der Reibung nichts im Wege. Nun hängt aber f in hohem Grade von dem Zustande der sich berührenden Flächen ab, zunächst von dem Stoffe, aus dem die Körper hergestellt sind, dann von der Art der Bearbeitung und schliesslich von dem Schmiermittel, das man etwa zwischen beide Oberflächen gebracht hat. Wenn die Schmierschicht ziemlich dick ist, so dass sie die Oberflächen beider Körper vollständig von einander trennt, hängt der Reibungscoefficient, soweit die bisher besprochenen Umstände in Frage kommen, nur noch von der Zähigkeit des Schmiermittels, daneben aber namentlich auch von der Geschwindigkeit ab, mit der beide Flächen gegen einander gleiten. Unter Umständen sinkt hierbei der Reibungscoefficient auf einen sehr niedrigen Werth. Freilich darf hierbei der Normaldruck nicht so gross werden, dass er das Schmiermittel zur Seite verdrängt. Man kann dem zwar dadurch begegnen, dass man ein zäheres Schmiermittel — zähe Oele, Talg, consistentes Fett, Seife u. dgl. — verwendet; zugleich steigt aber damit die innere Reibung in der Schmierschicht und damit der Reibungscoefficient im Ganzen. Als Beispiel möge hier erwähnt werden, dass man die Reibung eines sich sehr langsam in einem Cylinder bewegenden Kolbens fast vollständig beseitigen kann, wenn man den Cylinder mit Oel füllt und dafür sorgt, dass das Oel in einer sehr dünnen Schicht den kleinen Zwischenraum zwischen dem Cylinder und dem auf einen etwas kleineren Durchmesser abgedrehten Kolben umspült. Der Kolben schwimmt dann vollständig im Oele;

wenn man ausserdem noch den Kolben um seine Axe langsam hin und her dreht, wodurch für eine gleichförmige Vertheilung der Oelschicht gesorgt wird, ist der Reibungswiderstand gegen eine mit sehr geringer Geschwindigkeit in der Richtung der Axe erfolgende Bewegung des Kolbens fast ganz unmerklich. Man macht davon Gebrauch bei der Construction mancher Festigkeitsmaschinen.

Dass auch die Geschwindigkeit von Einfluss auf die Grösse des Reibungscoefficienten ist, wurde schon erwähnt. Insofern die Reibung wesentlich durch den inneren Gleitwiderstand des Schmiermittels bedingt wird, wächst sie mit der Geschwindigkeit. Dies wird aus den an einer anderen Stelle zu besprechenden Eigenschaften der zähen Flüssigkeiten verständlich.

Auf Grund von Versuchen, die über die Reibungsverluste in Dynamomaschinen angestellt wurden, hat z. B. Dettmar (Elektrotechn. Zeitschr. 1899, S. 380) neuerdings für Zapfen mit Oelschmierung folgende Reibungsgesetze aufgestellt:

I. Bei constanter Lagertemperatur und bei constantem Drucke wächst der Reibungscoefficient mit der Wurzel aus der Wellengeschwindigkeit und somit die Reibungsarbeit mit der 1,5ten Potenz.

II. Bei constanter Lagertemperatur und Wellengeschwindigkeit ist der Reibungscoefficient umgekehrt proportional dem specifischen Lagerdrucke, sofern dieser 30—44 kg/qcm nicht überschreitet und die Reibung somit innerhalb dieser Grenzen unabhängig vom Drucke.

III. Bei constantem specifischem Drucke und constanter Wellengeschwindigkeit ist der Reibungscoefficient umgekehrt proportional der Lagertemperatur.

Nach den in diesen Sätzen zusammengefassten Erfahrungen, die auch mit früheren Arbeiten von Tower, Thurston und Browne in guter Uebereinstimmung stehen, wäre Gl. (83) bei Zapfen innerhalb der angegebenen Grenzen ungültig. In Satz III ist die Temperatur vom Eispunkte in Celsiusgraden zu rechnen. Für die Temperatur Null würde die Reibung hiernach unendlich gross werden; schon dieser Umstand weist

darauf hin, dass dem Satze jedenfalls nur eine beschränkte Gültigkeit zugesprochen werden kann.

Wenn sich die Oberflächen der festen Körper unmittelbar berühren oder wenn sie nur wenig angefettet sind, ist aber der Einfluss der Geschwindigkeit entgegengesetzt wie im vorigen Falle. Bei sehr geringen Geschwindigkeiten ist der Reibungscoefficient grösser und bei Geschwindigkeiten von etwa 15 bis 25 m in der Secunde, wie sie beim Eisenbahnbetriebe vorkommen, nimmt er beträchtlich ab.

Diese Bemerkung ist namentlich von Wichtigkeit bei der Beurtheilung der Bremswirkung an Eisenbahnzügen. Wenn man die Bremsklötze stark genug anzieht, werden die Räder an jeder Drehung gehindert. Der Eisenbahnzug fährt dann wie ein Schlitten auf dem Geleise dahin. Die hierbei als verzögernde Kraft auftretende gleitende Reibung ist abhängig von der Grösse des Reibungscoefficienten zwischen Rad und Schiene, und nach dem, was über diesen bemerkt wurde, folgt, dass die Bremswirkung in diesem Falle um so geringer ausfällt, je grösser die Fahrgeschwindigkeit ist. Man könnte sich hier einer sehr gefährlichen Täuschung hingeben, wenn man den Einfluss der Geschwindigkeit ausser Acht lassen wollte. — Zieht man dagegen die Bremsklötze weniger stark an, so rollen die Räder noch. In diesem Falle ist die Gleitgeschwindigkeit zwischen Rad und Schiene entweder Null oder wenigstens kleiner als die Zugsgeschwindigkeit. Damit wird auch der Reibungscoefficient grösser, und man kommt zu dem zunächst vielleicht wenig wahrscheinlich klingenden Schlusse, dass durch ein geringeres Anziehen der Bremsklötze eine grössere Bremswirkung erzielt wird, als durch ein sehr starkes Anziehen. In der That wird dieser Schluss aber auch durch die Erfahrung bestätigt. Es ist nicht nur ohne Zweck, sondern sogar schädlich, wenn man, um ein schnelles Anhalten des Zuges herbeizuführen, die Bremsklötze so stark anzieht oder durch Umsteuerung der Maschine mit dem Gegendampfe so stark auf die Treibräder einwirkt, dass sie entweder ganz festgestellt sind oder sich gar im verkehrten Sinne umdrehen.

Die grösste Bremswirkung wird vielmehr erzielt, wenn die Räder grade an der Grenze des Gleitens sind.

Bei den sonst gewöhnlich vorkommenden Geschwindigkeiten von etwa $\frac{1}{2}$ bis zu 5 m in der Secunde scheint die Reibung indessen nur wenig von der Geschwindigkeit abzuhängen. Man sieht deshalb von der Berücksichtigung des Einflusses der Geschwindigkeit in der Regel ganz ab, um so mehr, als man gewöhnlich ohnehin sehr im Zweifel darüber ist, wie hoch der Reibungscoefficient mit Rücksicht auf den Zustand der Oberflächen anzunehmen ist, da dieser im Laufe des Betriebs einer Maschine oft starken Schwankungen unterworfen ist. Nur darauf pflegt man gewöhnlich zu achten, dass bei sehr kleinen Geschwindigkeiten und namentlich bei der Geschwindigkeit Null, also bei relativer Ruhe der beiden Körper, der Reibungscoefficient grösser ist, als bei einer Geschwindigkeit von einigen Metern in der Secunde. Man unterscheidet demnach oft zwischen einem Reibungscoefficienten der Ruhe und einem Reibungscoefficienten der Bewegung.

In den technischen Kalendern und in anderen tabellarischen Zusammenstellungen, die jeder Techniker zur Hand zu haben pflegt, sind die üblichen Annahmen über die Grösse des Reibungscoefficienten verzeichnet. Es hätte keinen Zweck, diese Ziffern hier ebenfalls aufzunehmen; ich kann mich mit einem Hinweise auf jene Zusammenstellungen, die Jedem zugänglich sind, begnügen. Dagegen möchte ich nochmals davor warnen, diesen Angaben ein zu grosses Vertrauen zu schenken, wenn es sich um mehr als um eine ungefähre Abschätzung handelt. Wo es sich wesentlich um die Grösse der Reibung handelt, wird der Techniker bei dem heutigen Zustande unseres Wissens die Anstellung eigener Versuche in vielen Fällen kaum entbehren können.

Beachtenswerth ist der ungewöhnlich niedrige Reibungscoefficient zwischen Stahl und Eis, der freilich jedem Schlitten- oder Schlittschuhfahrer wohl bekannt ist. Wie er zu Stande kommt, und ob man nicht auch andere, bei gewöhnlicher Temperatur anwendbare Materialien auffinden könnte, die ohne

jede Schmierung einen ähnlich niedrigen Reibungscoefficienten aufwiesen, ist bisher noch nicht recht aufgeklärt. Es würde sich vielleicht lohnen, danach zu suchen; in erster Linie wäre dabei wohl an krystallisirte Körper zu denken.

§ 35. **Reibungswinkel und Reibungskegel.**

Die ganze an der Berührungsstelle beider Körper übertragene Kraft, also die Resultirende aus dem Normaldrucke und der Reibung, bildet mit der Richtung der Normalen einen gewissen Winkel, der seinen grössten Werth erlangt, wenn die Reibung am grössten ist. Dieser grösstmögliche Winkel heisst der Reibungswinkel und soll mit φ bezeichnet werden. Er steht in einem einfachen Zusammenhange mit dem Reibungscoefficienten. Bei der Zusammensetzung von N und F entsteht nämlich ein rechtwinkliges Dreieck, in dem der Winkel φ der Kathete F gegenüber liegt. Man hat also

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{N} = f. \tag{84}$$

Alle Linien, die mit der Normalen den Winkel φ einschliessen, liegen auf einer Kreiskegelfläche, und der von ihr begrenzte Kegel wird der Reibungskegel genannt. In jedem Flächenelemente der Berührungsfläche muss demnach der ganze übertragene Druck entweder innerhalb des Reibungskegels oder auf der ihn begrenzenden Kegelfläche liegen. Der letzte Fall tritt immer dann ein, wenn entweder ein Gleiten wirklich stattfindet oder wenn der Grenzzustand des Gleichgewichts erreicht ist.

Mit Hülfe des Reibungswinkels oder des Reibungskegels lassen sich viele Aufgaben über das Gleichgewicht in sehr einfacher Weise lösen. Man zeigt dies am besten an einigen Beispielen.

In Abb. 57 stelle AB eine Leiter oder eine Stange dar, die sich bei B gegen den rauhen Fussboden, bei A gegen eine Mauer stützt. Sie trage ein Gewicht Q oder auch mehrere Gewichte, deren Resultirende Q ist, wobei das Eigengewicht

schon mit eingerechnet sein soll. Es fragt sich, ob die Leiter abrutscht oder ob sie durch die Reibung im Gleichgewichte gehalten wird. — Zur Lösung der Aufgabe ziehe man in A und B Normalen zur Mauer- bezw. zur Fussbodenfläche und trage nach beiden Seiten den Reibungswinkel φ ab. Dieser selbst muss als gegeben angesehen oder, wenn der Reibungscoefficient gegeben ist, aus Gl. (84) zuvor berechnet werden. Beide Winkelräume, zu denen man auf diese Weise gelangt, haben ein Viereck gemeinsam, das in Abb. 57 durch Schraffirung hervorgehoben ist. Nun verlängere man die Richtungslinie von Q und sehe zu, ob sie die Vierecksfläche durchschneidet. Thut sie dies, dann ist die Leiter im Gleichgewichte. Wählt man nämlich einen auf Q und in der Vierecksfläche liegenden Punkt C willkürlich aus, verbindet C mit A und B und zerlegt Q nach den Richtungen beider Verbindungslinien, so erhält man Auflagerkräfte bei A und B, die mit Q Gleichgewicht herstellen können und die noch innerhalb beider Reibungskegel liegen. Das Gleichgewicht ist also möglich, ohne dass irgendwo die Reibung ihren Maximalwerth überschreitet, und nach dem allgemeinen Grundsatze, der im vorigen Paragraphen als durch die Erfahrung verbürgt eingeführt wurde, ist damit auch nachgewiesen, dass das Gleichgewicht thatsächlich besteht. Zugleich erkennt man, dass das Gleichgewicht noch auf sehr viele Arten möglich ist, je nach der Wahl des Punktes C. Welcher von allen Gleichgewichtszuständen wirklich eintritt, vermag man dagegen nicht zu sagen; dies hängt auch in der That von Bedingungen ab, die gar nicht bekannt sind, nämlich von der Art, wie die Leiter

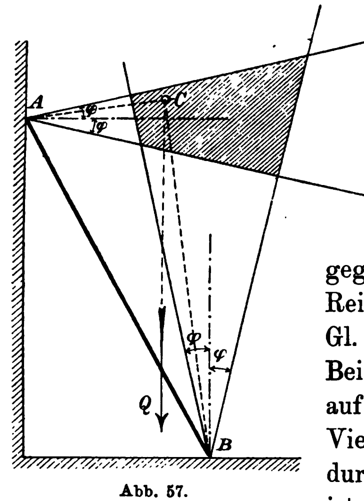


Abb. 57.

schon vor ihrer Belastung aufgestellt wurde. Der Gleichgewichtszustand wird z. B. ein anderer, wenn man die Leiter zuerst in B aufstellt und sie dann durch Drehung um B an die Mauer anlehnt, als wenn man sie durch eine an B angreifende horizontale Kraft näher an die Mauer herangeschoben hat, wobei sie sowohl bei B als bei A gleitet. Diese Unbestimmtheit ist aber praktisch gewöhnlich ohne Wichtigkeit, da es genügt, zu wissen, ob die Leiter stehen bleibt oder abgleitet.

Wenn ein Mann auf der Leiter hinaufsteigt, verschiebt sich Q und es kann dann aus der Viereckfläche heraustreten; in diesem Falle tritt ein Abrutschen ein. Es muss eintreten, wenn das Leitergewicht unbedeutend gegenüber der Belastung und diese weit genug nach oben gelangt ist. Wenn das Leitergewicht nicht zu klein gegenüber der Belastung und der Reibungswinkel ziemlich gross ist, kann der Mann die Leiter aber auch bis oben hin besteigen, ohne dass die Resultirende Q aus beiden Gewichten aus der Vierecksfläche heraustritt.

Diese ganze Betrachtung ist an sich ebenso schön abgerundet als irgend eine andere der Mechanik und sie ist ohne Zweifel von grossem Nutzen für die Beurtheilung des ganzen Vorgangs. Leider steht ihrer unmittelbaren Anwendung nur wieder der Umstand im Wege, dass man sich in den meisten Fällen im Unklaren darüber befinden wird, auf welchen Werth des Reibungswinkels φ oder des Reibungscoefficienten f man rechnen darf.

Bei dem eben behandelten Beispiele war stillschweigend angenommen worden, dass die Mittellinie der Leiter oder Stange in der zur Mauer- und zur Fussbodenfläche senkrechten Zeichenebene enthalten sei. Man brauchte sich deshalb nur um die Winkelräume zu kümmern, nach denen die beiden Reibungskegel von der Zeichenebene geschnitten werden. Die Stange kann aber auch schief zu dieser Ebene aufgestellt sein, ohne dass sich das Verfahren deshalb wesentlich zu ändern brauchte. Man wird in diesem Falle nur den Raum ins Auge zu fassen haben, der in beiden Reibungskegeln zu-

gleich liegt; so lange die Richtungslinie von Q diesen Raum durchschneidet, besteht Gleichgewicht. Praktisch führt man diese Untersuchung am besten in der Art aus, dass man durch die Mittellinie der Stange und die Richtungslinie von Q eine Ebene legt, die beide Reibungskegel nach Winkelräumen schneidet. Man findet dann in der Ebene ein Viereck, das in beiden Winkelräumen enthalten ist, und sieht zu, ob die Richtungslinie von Q durch die Vierecksfläche geht. Freilich ist hier zu beachten, dass der Oeffnungswinkel der Winkelräume jetzt kleiner ist als 2φ. Es kann auch sein, dass jene Ebene ganz ausserhalb eines der beiden Reibungskegel liegt; dann ist bei keiner Stellung von Q Gleichgewicht möglich.

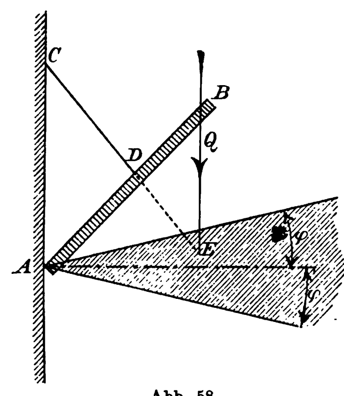


Abb. 58.

Ein anderer Fall wird durch Abb. 58 verdeutlicht. Eine Stange AB liegt in einer zur Mauer AC senkrechten Ebene und stützt sich in A gegen die Mauer. Ausserdem wird sie durch ein Seil CD gehalten. Es fragt sich, ob sie unter der Last Q im Gleichgewichte bleibt oder ob ein Gleiten bei A eintritt.

Zur Lösung beachte man, dass sich drei Kräfte an einem Körper nur dann im Gleichgewichte halten können, wenn sich die Richtungslinien in einem Punkte schneiden. Von Q und von der durch das Seil auf die Stange übertragenen Kraft kennt man die Richtungslinien. Man suche deren Schnittpunkt E auf; dann muss auch die bei A übertragene Auflagerkraft durch E gehen. Gleichgewicht besteht demnach, wenn E im Innern, oder im Grenzfalle auch noch, wenn es auf dem Umfange des Reibungskegels liegt. Im vorliegenden Falle ist übrigens auch die Grösse der Reibung eindeutig bestimmt, da nur auf eine einzige Art das Gleichgewicht hergestellt werden kann.

Ganz ähnlich ist der durch Abb. 59 veranschaulichte Fall. Eine Walze ruht auf dem Fussboden und auf sie stützt sich bei C eine Stange, die mit dem anderen Ende A auf dem Fussboden ruht. Die Stange trägt eine Last Q, die gross gegenüber dem Gewichte der Walze sein soll. Die Walze muss, wenn ihr Gewicht vernachlässigt wird, unter dem Einflusse von zwei Kräften, die sich bei B und C auf sie übertragen, im Gleichgewichte sein. Die Richtungslinien dieser Kräfte fallen demnach mit der Verbindungslinie BC zusammen. Andererseits greifen an der Stange drei Kräfte an, von denen zwei der Richtungslinie nach bekannt sind. Man verlängere BC bis zum Schnittpunkte D. Dann muss der Auflagerdruck bei A in die Richtung AD fallen. Das Gleichgewicht ist gesichert, wenn AD in den zu A gehörigen Reibungskegel fällt und wenn ausserdem die Richtung von BC sowohl bei B als bei C von der Normalen nicht um mehr als den Reibungswinkel abweicht. Wenn die Last Q nach C hin fortschreitet, wird schliesslich D aus dem Reibungskegel von A treten, worauf ein Gleiten bei A erfolgt.

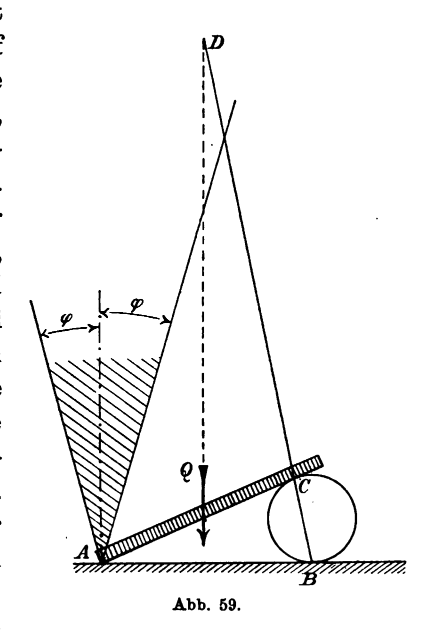


Abb. 59.

In Abb. 60 ist ein Prisma gezeichnet, das auf den Fussboden gestellt ist. Eine horizontale Kraft, die tief genug daran angreift, verschiebt das Prisma auf dem Fussboden, während sie es bei höherer Lage

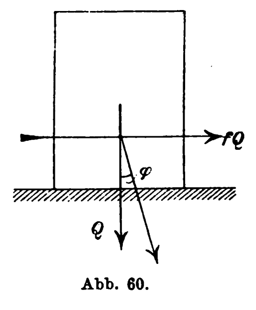


Abb. 60.

umkippt; man soll untersuchen, welcher von beiden Fällen eintritt. — Zum Verschieben des Prismas ist mindestens eine Kraft von der Grösse fQ erforderlich, worin f der Reibungscoefficient der Ruhe ist. Die Resultirende aus fQ und Q bildet mit Q den Reibungswinkel φ; wenn sie die Grundfläche des Prismas schneidet, tritt ein Verschieben, und wenn sie ausserhalb vorbei geht, ein Umkippen ein.

Einem Aufsatze von Burls im Engineering, 14. April 1899, S. 499 entnehme ich noch eine hierher gehörige Betrachtung über das Gleichgewicht auf der schiefen Ebene.

In Abb. 61 sei AB die schiefe Ebene, auf der in O ein materieller Punkt unter Einwirkung einer äusseren Kraft im Grenzzustande des Gleichgewichts stehen soll. Man ziehe die Normale ON und trage von dieser zu beiden Seiten den Reibungswinkel φ ab. Dann trage man auf der Lothrechten OC das Eigengewicht des materiellen Punktes in einem passenden Maassstabe ab und

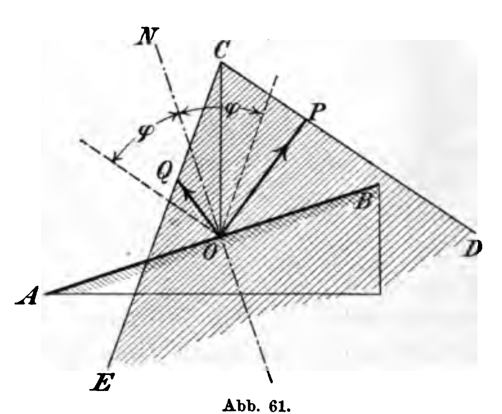


Abb. 61.

ziehe von C aus Parallelen zu den Grenzlinien des Reibungskegels. Diese Parallelen CD und CE schliessen einen durch Schraffirung hervorgehobenen Winkelraum ein und jede Strecke OP oder OQ, die von O aus bis zu den Schenkeln gezogen ist, gibt die Grösse der äusseren Kraft an, die man in der betreffenden Richtung auf den materiellen Punkt wirken lassen muss, um diesen im Grenzzustande des Gleichgewichts zu erhalten.

Der Beweis folgt (einfacher als in der Quelle) daraus, dass der Druck der schiefen Ebene im Grenzzustande den Winkel φ mit der Normalen bilden muss und dass daher das

Dreieck COP oder COQ ohne Weiteres das Kräftedreieck für das Gleichgewicht zwischen diesem Drucke, dem Eigengewichte und der gesuchten äusseren Kraft darstellt.

§ 36. Reibung in Führungen.

Diese Reibung ist zwar ganz ähnlich zu beurtheilen, wie bei den vorausgegangenen Fällen; wegen der besonderen praktischen Wichtigkeit soll sie aber noch eigens besprochen werden. In Abb. 62 sei AB eine Führung, also eine Stange von prismatischer Gestalt und C ein Körper, der diese gut passend umschliesst, so dass er sich längs der Führung verschieben kann. Seitlich, etwa an einem Arme, der mit C verbunden ist, greife eine Kraft Q an, die auch als Resultirende mehrerer Lasten aufgefasst werden kann. Es fragt sich, ob Q ein Verschieben herbeiführen kann, oder ob ein Festklemmen zu erwarten ist.

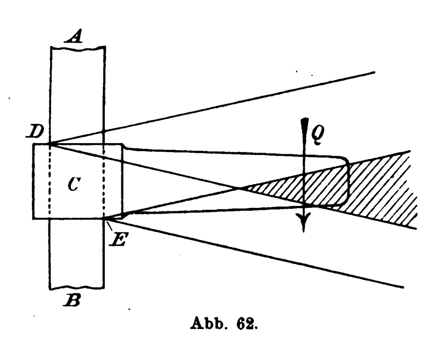


Abb. 62.

Im ersten Augenblicke, nachdem Q aufgebracht ist, wird jedenfalls eine kleine Bewegung eintreten, da der Körper C zunächst ganz locker auf der Führungsstange aufsitzen soll. Diese Bewegung von C wird zum Theile in einer fortschreitenden Bewegung, zum Theile in einer drehenden Bewegung um den Schwerpunkt bestehen, da die Richtungslinie von Q nicht durch den Schwerpunkt von C geht. In Folge der Drehung legt sich C an den Stellen E und D an die Führungsstange an. Es werden Auflagerkräfte an diesen Stellen entstehen, die ein weiteres Fortschreiten verhindern, wenn sie im Stande sind, Gleichgewicht mit Q herzustellen, ohne dass die Reibung ihren Maximalwerth zu übersteigen braucht. Man construire die zu D und E gehörigen Reibungskegel und suche den ihnen gemeinschaftlichen Raum auf. In der Zeich-

ıung entsprechen den Reibungskegeln zwei Winkelräume, und die in beiden enthaltene Fläche ist durch Schraffirung hervorgehoben. Wenn die Richtungslinie von Q durch die schraffirte Fläche geht, tritt ein Festklemmen ein.

Man erkennt hieraus zunächst, dass das Festklemmen um so eher eintritt, je weiter seitlich Q liegt. Ausserdem kommt es aber auch wesentlich auf die Länge der Führung, also auf den Abstand der Punkte D und E im Sinne der Axe und quer dazu an. In manchen Fällen ist das Festklemmen erwünscht, da man C durch die Reibung festhalten will. Dann wird man die Führung breit und kurz (d. h. klein in der Richtung der Axe und gross quer zur Axe) zu wählen haben. Will man im Gegentheile, dass die Bewegung durch die Reibung möglichst wenig gehindert wird, so muss man die Führung lang in der Richtung der Axe machen und den Querschnitt der Führung klein wählen.

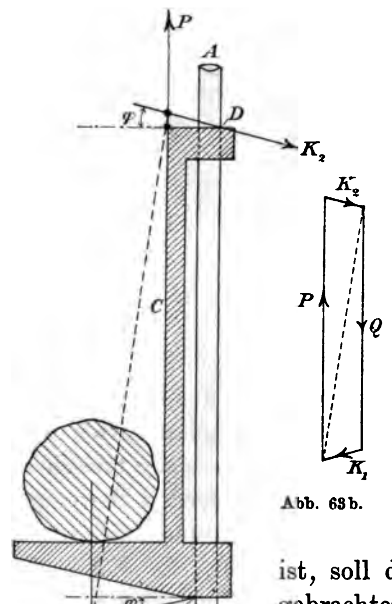


Abb. 63a

Abb. 63b.

Ein weiteres Beispiel wird dies noch besser aufklären. In Abb. 63a sei ein Fahrstuhl C längs einer Stange AB geführt. Eine Last Q, in die das Gewicht des Fahrstuhls schon mit eingerechnet ist, soll durch ein am oberen Ende angebrachtes Seil mit der Kraft P in die Höhe gehoben werden. Da die Bewegung hier durch die Reibungen möglichst wenig gehindert werden soll, muss man die Führung möglichst lang machen. Es ist aber nicht nöthig, dass die Führungsstange auf die ganze Länge der Führung wirklich umschlossen wird; es genügt

schon, wenn man den oberen und den unteren Theil der Führung ausführt und den mittleren Theil weglässt, wie es in der Zeichnung angegeben ist. Der Körper C legt sich zunächst wieder, wie im vorigen Beispiele, in den Punkten D und E an die Führungsstange an. Wenn die Bewegung des Fahrstuhls nach oben im Gange ist, bildet der Auflagerdruck an beiden Stellen den Reibungswinkel φ mit der Normalen. Damit kennt man die Richtungen der von der Führungsstange auf den Fahrstuhl übertragenen Kräfte K_1 und K_2, denn es ist klar, dass beide eine Reibungscomponente in jener Richtung besitzen, die der Aufwärtsbewegung entgegengesetzt ist. Bei gleichförmiger Bewegung des Fahrstuhls nach oben müssen die vier daran angreifenden Kräfte P, Q, K_1, K_2 im Gleichgewichte miteinander stehen. Man suche die Schnittpunkte von K_1 mit Q und von K_2 mit P auf. Die Resultirende aus den ersten beiden muss der Resultirenden aus den beiden letzten das Gleichgewicht halten und die Richtungslinien von beiden Resultirenden fallen daher auf die Verbindungslinie der beiden vorher erwähnten Schnittpunkte. In Abb. 63a ist die Verbindungslinie punktirt eingetragen. Man kann jetzt den in Abb. 63b gezeichneten Kräfteplan construiren, indem man zuerst ein Dreieck aus der gegebenen Kraft Q mit K_1 und der Resultirenden aus beiden bildet und dann in einem zweiten, daran gereihten Kräftedreiecke die Resultirende nach den Richtungen von P und K_2 zerlegt. Damit findet man die Kraft P, die zum Betriebe des Aufzugs erforderlich ist. — Je weiter man den Angriffspunkt des Seiles der Richtungslinie von Q nähert, desto kleiner wird die Kraft P, und wenn P und Q in die gleiche Richtung fallen, verschwinden die Reibungen und P wird gleich Q.

Natürlich kann man P auch durch Rechnung ermitteln, so dass die wirkliche Ausführung der Zeichnung im Maassstabe entbehrlich wird. Wer eine wohlbegründete Scheu vor dem Reissbrette und dem Zeichenstifte empfindet, weil er sich im Zeichnen nicht sicher fühlt, wird diesen Weg lieber einschlagen. Er kann dann etwa so verfahren, dass er K_1 und K_2 von

vornherein in horizontale und verticale Componenten zerlegt. Die Horizontalcomponenten müssen einander gleich sein, da alle übrigen Kräfte in verticaler Richtung gehen. Die Reibungen folgen daraus durch Multiplication mit dem Reibungscoefficienten. Schreibt man nun eine Momentengleichung an für einen Momentenpunkt, der auf der Richtungslinie von P liegt, so kommt darin nur die Grösse der Horizontalcomponenten von K_1 und K_2 als Unbekannte vor. Nach deren Ermittelung folgt auch P durch eine Componentengleichung für die verticale Richtung. — Anschaulicher bleibt aber in solchen Fällen immer das zeichnerische Verfahren; man kann bei ihm am besten überschauen, welchen Einfluss auf das Resultat irgend eine Aenderung in der ganzen Anordnung herbeiführt.

§ 37. Zapfenreibung und Reibungskreis.

Auf einen Zapfen, also auf einen Körper von cylindrischer Gestalt, der von einem ihn auf dem ganzen Umfange umschliessenden Lager umgeben ist, wirke eine äussere Kraft Q. Wenn Q durch den Mittelpunkt des Zapfens geht, herrscht Gleichgewicht. Auf jedem Flächentheilchen des Umfangs wird ein Normaldruck N (Abb. 64) übertragen, dessen Richtung durch den Zapfenmittelpunkt geht, und die geometrische Summe dieser Auflagerkräfte ist Q gleich und entgegengesetzt gerichtet. Reibungen sind zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts nicht nöthig und sie treten daher auch nicht auf. Man hat

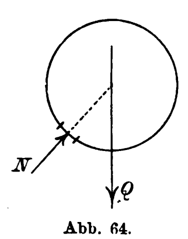


Abb. 64.

$$\Sigma \mathfrak{N} = -\mathfrak{Q}, \quad \text{aber} \quad \Sigma N > Q.$$

Es kommt auf die Vertheilung der Auflagerkräfte N über den Zapfenumfang an, um wie viel ΣN grösser ist als Q. Der Unterschied ist um so geringer, je mehr sich N auf den unteren Theilen der Berührungsfläche des Zapfens zusammendrängt. Wir setzen

$$\Sigma N = \alpha Q, \quad \text{wobei} \quad \alpha > 1$$

ist. — Wir wollen jetzt annehmen, dass die Belastung Q des Zapfens ein wenig excentrisch angreife. Ohne Zuhülfenahme der Reibungen kann dann kein Gleichgewicht mehr bestehen, denn die Normalkräfte N können immer nur eine Resultirende ergeben, die durch den Kreismittelpunkt geht. Da eine Bewegung des Schwerpunkts nicht stattfindet, muss zwar auch jetzt noch $\Sigma \mathfrak{N} = - \mathfrak{Q}$ sein, aber die Resultirende der $\mathfrak{N}$ und die Belastung $\mathfrak{Q}$ bilden jetzt ein Kräftepaar miteinander, dessen Moment gleich Qq ist, wenn q den senkrechten Abstand der Richtungslinie von $\mathfrak{Q}$ vom Zapfenmittelpunkte bedeutet. Dieses Kräftepaar bringt eine beschleunigte Rotation des Zapfens hervor.

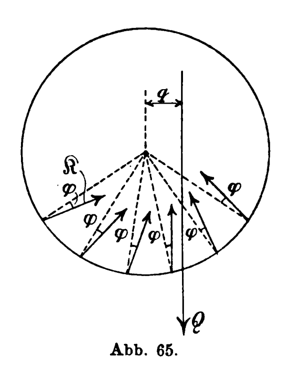


Abb. 65.

Anders wird die Sache, wenn Reibungen hinzukommen. Diese können das Gleichgewicht aufrecht erhalten, so lange die Excentrität q der Belastung nicht zu gross wird. Es wird sich vor allen Dingen darum handeln, den zur Grenzlage des Gleichgewichts gehörigen grössten Werth von q zu ermitteln. — An Stelle der Normalkräfte $\mathfrak{N}$ treten jetzt Kräfte $\mathfrak{R}$ am Zapfenumfange auf, die mit der Richtung von $\mathfrak{N}$ den Reibungswinkel φ einschliessen. Auf jeden Fall muss auch jetzt noch $\Sigma \mathfrak{R} = - \mathfrak{Q}$ sein, da eine Verschiebung des Zapfenschwerpunktes ausgeschlossen ist. Es handelt sich also nur darum, ob die Resultirende der Auflagerkräfte Gleichgewicht mit der Belastung herstellt oder ob beide ein Kräftepaar miteinander bilden. Dies wird durch eine Momentengleichung entschieden, die wir auf den Zapfenmittelpunkt als Momentenpunkt beziehen. Wir denken uns jedes $\mathfrak{R}$ in eine Normalcomponente N und in die Reibung F zerlegt. Die erste Componente trägt zur Momentengleichung nichts bei, da sie durch den Momentenpunkt geht. Das Moment der Reibung F ist gleich Fr, wenn der Zapfenhalbmesser mit r bezeichnet wird. Die Gleichgewichtsbedingung lautet daher

$$r\Sigma F = Qq \quad \text{oder} \quad rf\Sigma N = Qq.$$

Für ΣN kann man wie vorher αQ setzen, wobei α ein Zahlenfactor ist, von dem man zunächst nur weiss, dass er etwas grösser ist als Eins. Damit erhält man für die Grenzlage des Gleichgewichts

$$q = rf\alpha.$$

Anstatt nun f für sich und α für sich zu ermitteln, ist es zweckmässiger, das Product aus beiden unmittelbar aus einem Versuche zu entnehmen. Man schreibt also an Stelle der vorigen Gleichung

$$q = rf', \tag{85}$$

wobei nun $f' = f\alpha$ als der Zapfenreibungscoefficient bezeichnet wird. Dieser muss demnach etwas grösser sein als der Reibungscoefficient f. Thatsächlich findet man freilich die Angabe von f' oft erheblich niedriger, als die von f für die gleichen Materialien und den gleichen Zustand der Oberflächen. Das kommt indessen nur davon her, dass bei Zapfen die Bearbeitung und Schmierung gewöhnlich besser ist, als bei ebenen Flächen.

Schlägt man mit dem nach Gl. (85) berechneten Werthe von q als Halbmesser einen Kreis um den Zapfenmittelpunkt, so besteht immer Gleichgewicht, so lange die Richtungslinie der Zapfenbelastung diesen Kreis entweder schneidet oder in der Grenzlage ihn berührt. Dieser Kreis heisst der Reibungskreis des Zapfens. Bei gleichförmiger Drehung des Zapfens berührt der Zapfendruck stets den Reibungskreis, denn die Reibung nimmt hier überall ihren Maximalwerth an.

Der Reibungskreis leistet ähnliche Dienste wie im vorigen Paragraphen der Reibungskegel Die wichtigste Anwendung findet er bei der Untersuchung einer zur Uebertragung von Zug- oder Druckkräften dienenden Stange, die an beiden Enden mit Zapfen drehbar befestigt ist. Wenn keine Reibungen vorkämen, müsste die Resultirende aller am Umfange eines Zapfens übertragenen Kräfte durch den Zapfenmittelpunkt gehen. Vernachlässigt man das Gewicht der Stange,

so bleiben nur diese beiden Zapfendrücke, die im Gleichgewichte miteinander stehen müssen. Daraus folgt, dass die Stange nur eine Kraft zu übertragen vermag, deren Richtungslinie durch beide Zapfenmittelpunkte geht, die also mit der Stangenmittellinie zusammenfällt. Von diesem Satze macht man bei vielen Berechnungen Gebrauch. Er bleibt aber nicht genau richtig, wenn man auf die Reibungen am Zapfenumfange achten muss. Wir wissen dann nur, dass der Zapfendruck an jedem Ende mit dem Reibungskreise mindestens einen Punkt gemeinsam haben muss. Jede Linie, die die Reibungskreise beider Zapfen schneidet oder wenigstens berührt, ist danach eine mögliche Richtungslinie der von der Stange übertragenen Kraft. Die grösste Abweichung von der Richtung der Stangenmittellinie entspricht einer inneren gemeinschaftlichen Tangente an beide Reibungskreise. In Abb. 66 ist die Stange mit den Reibungskreisen der Zapfen und den inneren gemeinschaftlichen Tangenten gezeichnet. Um eine deutliche Figur zu erhalten, mussten die Zapfendurchmesser und ausserdem auch der Zapfenreibungscoefficient ungewöhnlich gross angenommen werden; die Reibungskreise sind punktirt gezeichnet. In der Regel sind die Zapfen und ihre Reibungskreise von viel kleinerem Durchmesser im Vergleiche zur Stangenlänge, als in der Zeichnung angenommen wurde. Man erkennt, dass dann in der That auch mit Berücksichtigung der Reibung die Richtungslinie der von der Stange übertragenen Kraft nur wenig von der Stangenmittellinie abweichen kann. Es ist daher bei den meisten Berechnungen vollständig gerechtfertigt, beide Richtungslinien als zusammenfallend anzunehmen.

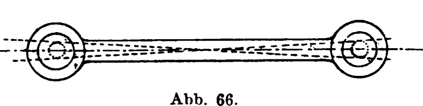


Abb. 66.

Eine Stange dieser Art ist z. B. auch die Kurbelstange einer Dampfmaschine. Wenn die Maschine nicht zu schnell umläuft, so dass die zur Beschleunigung der Kurbelstangenmasse erforderlichen Kräfte ebenso wie das Gewicht der Kurbelstange ausser Acht gelassen werden dürfen, kommen

nur zwei Kräfte an der Stange vor, die von den beiden Zapfen auf sie übertragen werden. Bei der Untersuchung des Kurbelmechanismus im vorigen Abschnitte, die auf die Zapfenreibung keine Rücksicht nahm, konnte daher angenommen werden, dass die Kraftübertragung in der Richtung der Verbindungslinie beider Zapfenmittelpunkte erfolge. Jetzt erkennen wir aber, dass diese Annahme nicht streng richtig ist; die Richtungslinie der übertragenen Kraft fällt vielmehr mit einer gemeinschaftlichen Tangente der Reibungskreise beider Zapfen zusammen. Es hängt von der augenblicklichen Stellung des Mechanismus und dem Umlaufssinne ab, welche der vier gemeinschaftlichen Tangenten in Frage kommt.

Bei der in Abb. 55 (S. 206) angenommenen Stellung und einer mit der Uhrzeigerbewegung übereinstimmenden Drehung der Kurbel ist der Winkel ψ in Zunahme und der zwischen der Kurbelstange und der Kurbel eingeschlossene Winkel $180^0 - (\varphi + \psi)$ in Abnahme begriffen. Daraus folgt, dass der Zapfendruck am Querhaupte den Reibungskreis oben und der Zapfendruck an der Kurbel den ihm zugehörigen Reibungskreis unten berühren muss. Man erkennt das am einfachsten, wenn man sich die Kurbelstange zerschnitten denkt und an jedem Stumpfe eine Kraft so anbringt, dass sie relativ zu dem damit verbundenen Gliede, das man sich hierbei feststehend denken kann, eine Drehung in jener Richtung bewirkt, die eine Zunahme oder Abnahme der betreffenden Winkel herbeiführt. In der betrachteten Stellung fällt daher die Richtung des übertragenen Druckes mit einer inneren Tangente beider Reibungskreise zusammen und zwar mit jener, die mit der Cylinderaxe einen kleineren Winkel als ψ bildet. Sobald die Bewegung so weit vorgeschritten ist, dass ψ wieder abnimmt, während der andere Winkel ebenfalls noch in der Abnahme begriffen ist, berührt die Richtungslinie der von der Kurbelstange übertragenen Kraft beide Reibungskreise von unten und bei der Rückkehr nach vollendetem Kolbenhube tritt ebenfalls wieder ein Richtungswechsel der Kraftrichtung gegenüber der Stangenmittellinie ein. — Gewöhnlich ist es

aber nicht nöthig, bei der Berechnung der Dampfmaschine auf diese Richtungsunterschiede Rücksicht zu nehmen, da sie wegen der grossen Länge der Kurbelstange gegenüber den Halbmessern der Reibungskreise nur geringfügig sind. Grösser wird die Abweichung bei einer Excenterstange. Ein Excenter ist als ein Kurbelzapfen von besonders grossem Zapfendurchmesser aufzufassen. Wegen des grossen Zapfendurchmessers ist auch der Reibungskreis verhältnissmässig gross und die an ihn gelegte Tangente weicht daher, namentlich bei geringer Länge der Excenterstange, merklich von der Richtung der Stangenmittellinie ab.

§ 38. **Reibung stehender Zapfen.**

Wenn sich zwei Körper nur in einem Punkte berühren, kann eine Bewegung des einen relativ zum andern auch in einer Drehung um die gemeinsame Normale der sich berührenden Oberflächen bestehen. Der sich einer solchen Drehung entgegen stellende Widerstand wird als bohrende Reibung bezeichnet. Ein solcher Widerstand kann sich indessen nur dann bemerklich machen, wenn beide Körper mit einem gewissen Normaldrucke aufeinander gepresst sind. Thatsächlich kann nun ein endlicher Druck zwischen zwei Körpern nicht in einem einzigen Punkte, sondern nur in einer, wenn auch nur kleinen, Fläche übertragen werden, da sich alle Körper beim Aufeinanderdrücken etwas abplatten. Wenn jetzt eine Drehung um die Normale erfolgen soll, müssen die in der Druckfläche miteinander in Berührung stehenden Theilchen beider Körper über einander gleiten. Man erkennt daraus, dass die sogenannte bohrende Reibung eine zusammengesetzte Erscheinung bildet, die sich auf den Widerstand gegen Gleiten zurückführen lässt.

Practisch kommt ein Widerstand gegen Drehung um die Berührungsnormale namentlich bei den stehenden Zapfen (Stützzapfen) vor. Dabei soll als stehender Zapfen ganz allgemein ein Zapfen verstanden werden, dessen Belastung in die Rich-

tung der Drehaxe fällt. Bei dem liegenden Zapfen, auf den sich die Untersuchungen des vorigen Paragraphen bezogen, steht die Belastung Q rechtwinklig zur Zapfenaxe und der Druck wird zwischen der cylindrischen Zapfenoberfläche und den Lagerschalen übertragen. Bei genauer Einstellung des stehenden Zapfens, durch die ein Klemmen im Lager vermieden wird, tritt dagegen in der cylindrischen Fläche kein Druck und daher auch keine Reibung von merklichem Betrage auf. Druckübertragung und Reibung sind vielmehr auf die kreisförmige Basisfläche, die wir als eben voraussetzen wollen, beschränkt.

Wenn der Zapfenradius mit r bezeichnet wird (Abb. 67), kommt bei gleichförmiger Druckvertheilung auf die Flächeneinheit der Normaldruck $\frac{Q}{\pi r^2}$ und die ihm entsprechende, der Bewegung entgegen gerichtete Reibung ist gleich $\frac{Qf}{\pi r^2}$. Alle Reibungen lassen sich zu einem Kräftepaare vereinigen, dessen Moment M gleich der Summe der Momente aller einzelnen Reibungen für irgend einen Momentenpunkt ist. Zur Berechnung von M legen wir den Momentenpunkt am besten auf den Mittelpunkt der Basisfläche des Zapfens. Ziehen wir zwei Kreise mit den Radien x und $x + dx$, so haben alle in diesem unendlich schmalen ringförmigen Flächenstreifen auftretenden Reibungen denselben Hebelarm x; ihr Beitrag zu dem Reibungsmomente M ist

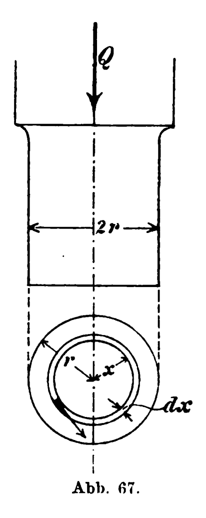


Abb. 67.

$$\frac{Qf}{\pi r^2} \cdot 2\pi x dx \cdot x.$$

Wir erhalten M durch Bildung der Summe aller dieser Ausdrücke für die Werthe von $x = 0$ bis $x = r$. Diese Summe wird durch Ausführung des bestimmten Integrals zwischen den genannten Grenzen erhalten, also

$$M = \frac{2Qf}{r^2}\int_0^r x^2 dx = \frac{2}{3} Qfr. \tag{86}$$

Das Reibungsmoment ist demnach für gleiche Belastung und gleichen Reibungscoefficienten beim stehenden Zapfen kleiner als beim liegenden. Es wird (wie auch beim liegenden Zapfen) um so kleiner, je kleiner der Zapfenradius bezw. der Radius r des Basiskreises gemacht wird. Man führt daher die Zapfen, wenn es sich um möglichste Beschränkung des Einflusses der Reibung handelt, so klein aus, als es die Rücksicht auf die Festigkeit des Materials, auf die Abnutzung, auf die Möglichkeit einer ausreichenden Schmierung und der Ableitung der entstehenden Reibungswärme gestattet.

Auf den Einfluss der Abnutzung ist bei den Zapfenlagern wohl zu achten. Constructive Erwägungen sind hier zwar nicht weiter auszuführen; es muss aber darauf hingewiesen werden, dass schon die vorher eingeführte Annahme einer gleichförmigen Vertheilung des Normaldrucks durch die Abnutzung in Frage gestellt wird. Die Abnutzung, die der Zapfen im Betriebe erfährt, hängt nämlich einerseits von dem Normaldrucke, andererseits aber auch von der relativen Geschwindigkeit ab, mit der das Gleiten der Oberflächen auf einander erfolgt. Nun ist beim stehenden Zapfen die Geschwindigkeit nach aussen hin grösser, als in der Nähe der Mitte. Sobald aber die Abnutzung in Folge dessen aussen weiter vorgeschritten ist, als innen, wird die Druckübertragung ungleichförmig, wenn sie auch vorher gleichförmig war. Die äusseren Theile werden auf Kosten der inneren entlastet und damit nimmt das Reibungsmoment ab. Dies ist übrigens nicht der einzige Grund dafür, dass die Reibung bei einem „eingelaufenen“ Zapfen geringer wird, als im Anfange. Wenn der Zapfen vorher nicht genau passte und sich in Folge dessen im Lager etwas klemmte, wird das Material an den betreffenden Stellen etwas abgenutzt, so dass er nachher lockerer sitzt. Diese Andeutungen mögen hier genügen.

§ 39. Rollende Reibung.

Auch wenn sich zwei Körper so gegeneinander bewegen, dass sich die Oberfläche des einen auf der des anderen abwickelt, tritt ein Widerstand auf. Bei harten Körpern ist er aber viel kleiner, als die gleitende Reibung und sehr häufig kann er daher ganz vernachlässigt werden. Von besonderer Wichtigkeit ist die rollende Reibung bei der Bewegung der Fuhrwerke. Der Zugwiderstand, der bei der Bewegung eines Wagens auf ebener, gradliniger Fahrbahn überwunden werden muss, besteht indessen nicht allein aus der rollenden Reibung der Räder. Auch die Reibung an den Zapfen, durch die die Lagerung der Räder gegen das Wagengestell bewirkt wird, äussert sich im Zugwiderstande. Um dies zu erkennen, sei von der rollenden Reibung zunächst ganz abgesehen. Wenn der Wagen still steht, empfängt das Rad einen durch den Zapfenmittelpunkt gehenden Druck seitens des Zapfens, der mit dem an der Aufsitzstelle des Rades vom Boden her übertragenen Drucke im Gleichgewichte ist. Sobald der Wagen fährt, geht aber der Zapfendruck nicht mehr durch den Zapfenmittelpunkt, sondern er bildet, wie wir aus den Untersuchungen in § 37 wissen, eine Tangente an den Reibungskreis. Mit dieser Kraft muss der Bodendruck immer noch im Gleichgewichte stehen; wir finden daher die Richtung des Bodendrucks, indem wir von der Aufsitzstelle des Rades aus eine Tangente an den Reibungskreis ziehen. In Abb. 68 ist diese Tangente eingetragen; dabei ist der Zapfenumfang ganz weggelassen und der Reibungskreis der Deutlichkeit wegen viel grösser gezeichnet, als er im Verhältnisse zum Rade zu sein pflegt.

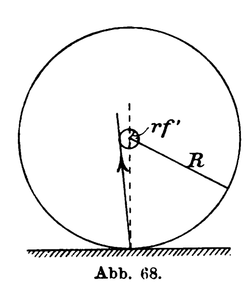


Abb. 68.

Die Verticalcomponente des Bodendrucks ist gleich der Belastung Q des Rades, wenn wie seither schon das Gewicht des Rades gegenüber seiner Belastung der Einfachheit wegen

vernachlässigt wird. Die Horizontalcomponente H finden wir aus der Proportion

$$\frac{H}{Q} = \frac{rf'}{R}, \quad \text{also} \quad H = Q\frac{rf'}{R}.$$

Wenn der Wagen in gleichförmiger Bewegung begriffen sein soll, müssen alle von aussen her auf ihn übertragenen Kräfte im Gleichgewichte miteinander stehen. Die vorhergehende Gleichung gibt daher sofort auch die Zugkraft H an, die zur Ueberwindung der Zapfenreibung am Wagen aufgewendet werden muss, wenn man nun unter Q das Gewicht des ganzen Wagens versteht. Dabei ist vorausgesetzt, dass alle Räder gleichen Halbmesser R und gleichen Zapfenradius r haben. Wenn die Hinterräder grösser sind als die Vorderräder, wie bei den gewöhnlichen Strassenfuhrwerken, lässt sich H leicht aus zwei Gliedern nach der Vorschrift der vorausgehenden Gleichung zusammensetzen. Man erkennt auch, dass es vortheilhaft ist, grosse Räder zu verwenden und dass es sich empfiehlt, den grösseren Rädern den Hauptheil der Last aufzubürden. In Kreisen von Practikern bestehen in dieser Hinsicht noch häufig irrige Meinungen, die auf falsch gedeuteten Beobachtungen beruhen. Dass die Theorie der Bewegung der Fuhrwerke mit den Thatsachen in guter Uebereinstimmung steht, ist schon durch viele sorgfältige Versuche erwiesen worden.

Bis jetzt ist die rollende Reibung noch nicht berücksichtigt worden, und ich will jetzt umgekehrt annehmen, dass die Zapfen absolut glatt seien, damit wir es nur mit einem einzigen Bewegungswiderstande zu thun haben. Die rollende Reibung hängt wesentlich von der Formänderung ab, die Fahrbahn und Rad unter dem Einflusse des zwischen ihnen übertragenen Druckes erfahren. Gewöhnlich ist das Rad viel widerstandsfähiger gegen eine Formänderung als die Fahrbahn, namentlich bei der Fahrt auf einem weichen, nachgiebigen Boden. Ich will diesen Fall zunächst voraussetzen.

In Abb. 69 ist angenommen, dass das Rad ein Geleise in den Boden einschneidet, der als plastisch vorausgesetzt

wird. Rad und Boden berühren sich jetzt nicht mehr in einer engbegrenzten Stelle, die näherungsweise als Punkt im Radaufrisse angesehen werden könnte, sondern längs eines Kreisbogens, der um so grösser ist, je tiefer das Geleise, je nachgiebiger also der Boden ist. Längs dieses ganzen Kreisbogens vertheilt sich auch der Bodendruck, den das Rad erfährt. Die Resultirende muss, wenn der Zapfen absolut glatt ist, des Gleichgewichts wegen durch den Zapfenmittelpunkt gehen. Sie hat eine horizontale Componente, die sich aus der Proportion

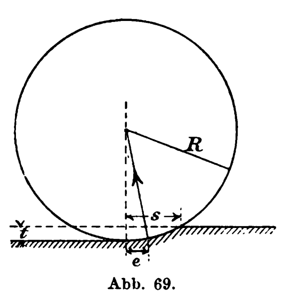


Abb. 69.

$$\frac{H}{Q} = \frac{e}{R} \quad \text{zu} \quad H = Q\frac{e}{R}$$

berechnet, wenn mit e der Abstand des Angriffspunktes des resultirenden Bodendrucks von dem lothrechten Radhalbmesser bezeichnet wird.

Nimmt man an, dass der Bodendruck in jedem Flächenelemente der Berührungsfläche proportional der dort schon bewirkten Eindrückung ist, so kann man e noch etwas näher berechnen, so dass es als Function der Tiefe des eingeschnittenen Geleises dargestellt wird. Es genügt dabei, falls die Tiefe t des Geleises klein ist gegen den Radhalbmesser R, den Kreisbogen als einen Parabelbogen von der Pfeilhöhe t und der halben horizontalen Sehne s zu betrachten. Die Tiefe der Einsenkung im Abstande x vom lothrechten Radhalbmesser sei y, dann ist

$$y = t\frac{s^2 - x^2}{s^2}$$

oder, da $s^2 = 2Rt$ gesetzt werden kann, auch

$$y = \frac{2Rt - x^2}{2R}.$$

Wenn nun der Bodendruck an jeder Stelle proportional mit y ist, geht die Resultirende durch den Schwerpunkt des halben Parabelsegments. Daher ist

$$e\int_0^s y\,dx = \int_0^s xy\,dx \quad \text{und hieraus} \quad e = \frac{3s}{8} = \frac{3}{8}\sqrt{2Rt}.$$

Auch der Einfluss der Grösse des Rades auf die Geleise-
efe kann unter der angenommenen Voraussetzung berechnet
erden. Da die Last Q gegeben ist, muss bei jeder Rad-
össe das halbe Parabelsegment denselben Flächeninhalt
ben; daher ist

$$ts = C,$$

o nun die Constante C nur noch von der Belastung Q und
n der Nachgiebigkeit des Bodens abhängt. Hiermit wird

$$s^3 = 2RC \quad \text{und daher} \quad e = \frac{3}{8}\sqrt[3]{2RC}.$$

iernach wächst zwar e mit dem Radhalbmesser, das Ver-
iltniss $\frac{e}{R}$, von dem die Zugkraft H abhängt, nimmt aber
it R ab und die rollende Reibung wird daher ebenfalls
einer bei grösseren Rädern. Freilich ist die Voraussetzung,
f der diese Rechnungen beruhen, dass der Druck an jeder
elle proportional mit y sei, ziemlich unsicher, und man darf
her kein zu grosses Gewicht auf die daraus abgeleiteten
ormeln legen.

Wenn der Boden nicht so vollkommen plastisch ist, wie
h bis jetzt annahm, wird er hinter dem Rade wieder etwas
die Höhe gehen. Der Kreisbogen, längs dessen der Boden-
uck übertragen wird, erstreckt sich jetzt auch etwas nach
ckwärts und der Abstand e der Resultirenden von dem loth-
chten Radhalbmesser wird kleiner. Damit nimmt auch der
ıgwiderstand ab.

Es fragt sich jetzt, wie sich die Verhältnisse gestalten,
enn der Boden vollkommen elastisch ist. Der Kreisbogen,
dem die Berührung stattfindet, erstreckt sich jetzt ebenso
eit nach hinten als nach vorn und es könnte scheinen, als
enn die rollende Reibung damit ganz verschwinden müsste.
e wird nun zwar in der That viel kleiner als vorher, aber
cht ganz zu Null. Beim Drucke des Rades auf den voll-
ommen elastischen Boden findet nämlich nicht nur eine Zu-
mmendrückung in senkrechter Richtung, sondern damit
gleich auch eine Dehnung in der Längsrichtung statt. In

Folge dessen ist der von dem Rade bei einer Umdrehung auf dem Boden zurückgelegte Weg nicht einfach gleich dem Radumfange, sondern etwas kleiner. Es muss daher mit dem Rollen an einzelnen Stellen zugleich ein geringes Gleiten zwischen Radumfang und Bodenoberfläche eintreten. Die Erscheinung ist ganz ähnlich jener, die dem Practiker unter dem Namen „Schlipf" als Gleiten des Riemens unter dem Einflusse der elastischen Dehnung längs des Scheibenumfangs bei einem Riementriebe bekannt ist. Die Resultirende aus den Normalkräften, die längs der Berührungsfläche übertragen werden, und den mit ihnen verbundenen gleitenden Reibungen geht auch jetzt wieder in etwas schräger Richtung, so dass ein Abstand e zu Stande kommt.

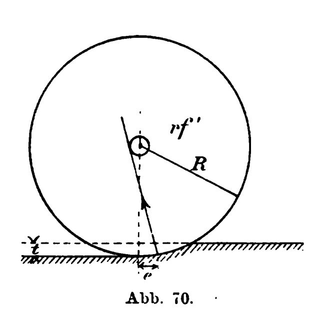


Abb. 70.

Berücksichtigt man ferner gleichzeitig Zapfenreibung und rollende Reibung, so erhält man die in Abb. 70 gezeichnete Richtung des resultirenden Bodendrucks. Unten hat der Bodendruck den Abstand e von dem lothrechten Radhalbmesser und oben berührt er den Reibungskreis des Zapfens. Beide Abweichungen von der lothrechten Richtung sind im Allgemeinen viel kleiner, als sie in Abb. 70 gezeichnet wurden; sie beeinflussen sich daher auch nicht merklich gegenseitig. Man findet demnach den Zugwiderstand im Ganzen durch Summirung der in beiden Fällen gefundenen Horizontalcomponenten H, also

$$H = Q\frac{rf' + e}{R} = f''Q. \qquad (87)$$

Der als Factor von Q auftretende Bruch ist hier mit f'' bezeichnet und dieser Factor kann nun zur Berechnung des Bewegungswiderstandes H aus der Belastung Q gerade so verwendet werden, als wenn es sich um eine gewöhnliche gleitende Reibung handelte. Es ist nämlich für die Anwendung viel bequemer, f'' unmittelbar aus einem Zugversuche mit einem

Wagen auf gegebener Fahrbahn zu ermitteln, als f' und e gesondert zu bestimmen und daraus f'' zu berechnen. Um sich ein Urtheil über den Einfluss zu bilden, den verschiedene Umstände auf die Grösse von f'' äussern, ist es aber natürlich nöthig, dass man weiss, aus welchen einzelnen Theilen sich f'' zusammensetzt.

Ganz allgemein ist übrigens aus den vorausgehenden Betrachtungen klar, dass die rollende Reibung bei absolut harten und genau bearbeiteten Berührungsflächen zu Null werden müsste und dass man sich dieser unteren Grenze um so mehr nähert, je weniger nachgiebig Fahrbahn und Rad sind. Dies ist der Grund, weshalb der Zugwiderstand auf einem Eisenbahngeleise weit niedriger ist, als auf irgend einem anderen Wege. Bei holperigem Pflaster kommt natürlich noch ein Grund zur Erhöhung des Zugwiderstandes hinzu, der bisher als selbstverständlich noch keine Erwähnung fand. Wenn das Wagenrad von einem höher liegenden Steine in eine Lücke abfällt, muss es nachher wieder gehoben werden; auch hierbei tritt ein Abstand e auf, ähnlich wie bei einer weichen, gleisebildenden Fahrbahn.

Bis jetzt wurde immer nur von der rollenden Reibung bei Wagenrädern gesprochen. Man schiebt aber auch in anderen Fällen häufig Walzen oder Kugeln, namentlich solche aus sehr hartem Gussstahle, zwischen die Oberflächen von zwei gegeneinander gleitenden Körpern, um die gleitende Reibung durch die viel kleinere rollende zu ersetzen. Als Coefficient der rollenden Reibung tritt hierbei nur der Factor $\frac{e}{R}$ auf; die Grösse von e hängt aber so sehr von dem Material und seiner Bearbeitung ab, dass man keine allgemeineren Angaben darüber machen kann. Mehr noch als sonst auf dem Gebiete der Reibung ist man in diesen Fällen auf die Anstellung von besonderen Versuchen angewiesen, wenn man einen zuverlässigen Aufschluss über die Grösse der rollenden Reibung haben will, auf die man in einem gegebenen Falle zu rechnen hat.

Auch die gleitende Reibung spielt bei der Bewegung der Räderfuhrwerke zuweilen eine wichtige Rolle, namentlich bei den Treibrädern der Locomotive. Wenn ein Eisenbahnzug abfahren soll, lässt man Dampf in die Cylinder strömen und dreht damit die Treibräder um. Wenn der Zug für die Locomotive zu schwer ist, drehen sich aber nur die Treibräder, ohne dass der Zug von der Stelle kommt; die Treibräder gleiten dann auf den Schienen. Ein Weiterfahren kann nur eintreten, wenn die gleitende Reibung zwischen Treibrädern und Schienen grösser ist, als der Zugwiderstand. Durch innere Kräfte allein kann sich ein Körper überhaupt nicht in Bewegung setzen; die äussere Kraft, die den Eisenbahnzug in Bewegung bringt, ist die gleitende Reibung an den Umfängen der Treibräder. Ihre Grösse ist abhängig von dem Raddrucke. Man erkennt daraus, dass die Locomotive ein gewisses Gewicht haben muss, um ihren Zweck zu erfüllen. Um das ganze Gewicht der Locomotive hierfür auszunützen, kuppelt man oft alle ihre Räder durch besondere Kuppelstangen miteinander so dass sie alle als Treibräder dienen. Jenen Theil des Gewichtes einer Locomotive, der von den Treibrädern aufgenommen wird, bezeichnet man als ihr Adhäsionsgewicht. Die grösste Zugkraft einer Locomotive ist gleich ihrem Adhäsionsgewichte multiplicirt mit dem Reibungscoefficienten zwischen Eisen und Eisen, der etwa zu $\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{4}$ (bei geringer relativer Gleitgeschwindigkeit) angenommen werden kann.

§ 40. Seilreibung.

Ein Seil oder ein Riemen sei um einen feststehenden cylindrischen Körper (etwa um einen Baumstamm) geschlungen. Die Spannungen der beiden freien Seilenden seien mit T_0 und T_1 bezeichnet (vgl. Abb. 71). Es fragt sich, um wie viel grösser T_1 sein muss, als T_0, wenn gerade der Grenzzustand des Gleichgewichts erreicht sein soll. Dabei wird vorausgesetzt, dass der cylindrische Körper selbst unwandelbar fest

gehalten ist, so dass er sich unter dem Einflusse der grösseren Kraft T_1 nicht zu drehen vermag. Eine Störung des Gleichgewichts ist also nur dadurch möglich, dass das Seil über den Cylinderumfang gleitet. Hierbei muss die gleitende Reibung zwischen dem Seile und dem Cylinder überwunden werden.

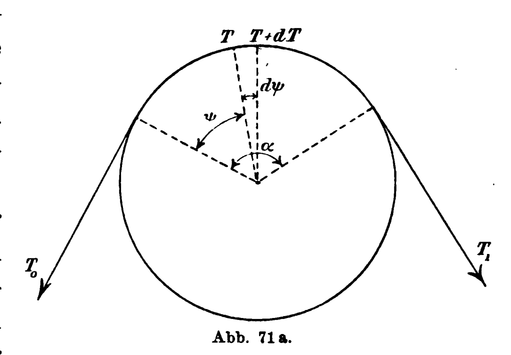


Abb. 71a.

Nach irgend einer Stelle des von dem Seile berührten Cylinderumfangs sei ein Radius gezogen, der mit dem zum Berührungspunkte von T_0 gehenden Radius einen Winkel ψ einschliesst. Die Seilspannung T an der Stelle ψ wird der Grösse nach zwischen T_0 und T_1 liegen. Wenn ψ um $d\psi$ wächst, nimmt auch T um dT zu. Der Unterschied dT ist gleich der Reibung, die in dem zu $d\psi$ gehörigen Theile des Umfangs übertragen wird. In Abb. 71b ist das Kräftedreieck für die an dem betreffenden Seilelemente angreifenden Kräfte T, $T + dT$ und D gezeichnet. D ist der ganze Druck, der von dem Cylinder auf das Seilelement ausgeübt wird; im Grenzzustande des Gleichgewichts schliesst die Richtung von D mit der Normalen, also mit der Verlängerung des Radius, den Reibungswinkel ein. Wir zerlegen D in die Normalcomponente N und in die Reibung, die, wie aus Abb. 71b sofort hervorgeht, gleich dT ist.

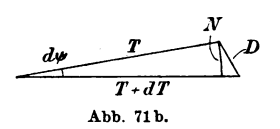


Abb. 71b.

Aus Abb. 71b folgt ferner

$$N = T d\psi.$$

Durch Multiplication mit dem Reibungscoefficienten f erhalten wir daraus die Reibung, also

$$dT = f T d\psi.$$

Wir formen diese Gleichung so um, dass sie nach T aufgelöst werden kann. Zunächst hat man

$$\frac{dT}{T} = f d\psi .$$

Die linke Seite ist das Differential des natürlichen Logarithmus von T, die rechte Seite das Differential von $f\psi$. Wenn beide Differentiale einander gleich sein sollen, können sich ihre Stammgrössen nur um eine Constante von einander unterscheiden. Wir gehen zu diesen Stammgrössen über, d. h. wir integriren die Gleichung und erhalten

$$\lg T = f\psi + C,$$

wobei C die vorläufig unbekannte Integrationsconstante bildet. Um sie zu bestimmen, beachten wir, dass die Gleichung für jeden Werth von ψ, der zwischen 0 und α liegt, gültig bleiben muss. Für $\psi = 0$ geht aber T in T_0 über und man hat daher

$$C = \lg T_0 .$$

Aus jener Grenzbedingung ist daher C ermittelt und die vorhergehende Gleichung nimmt nach Einsetzen des gefundenen Werthes die Form an

$$\lg \frac{T}{T_0} = f\psi .$$

Um T selbst als Function des Winkels ψ darzustellen, gehen wir von dem Logarithmus zur Exponentialfunction über und erhalten

$$\frac{T}{T_0} = e^{f\psi} \quad \text{oder} \quad T = T_0 e^{f\psi}.$$

Diese Gleichung gilt auch noch für $\psi = \alpha$, also für die Ablaufstelle des Seils. Dort nimmt T den Werth T_1 an und man findet

$$T_1 = T_0 e^{f\alpha}. \tag{88}$$

Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst. Man erkennt, dass T_1 sehr schnell mit dem umspannten Bogen α wächst. Wenn man diesen Bogen gross genug macht, kann man daher einer grossen Kraft T_1 durch eine sehr kleine Kraft T_0 das Gleichgewicht halten. Der Reibungscoefficient f von Seilen

oder Riemen auf Holz- oder Eisenflächen ist ohnehin ziemlich gross. Man nehme ihn etwa gleich 0,5; dann wird $e^{f\alpha}$ für $\alpha = \pi$, also für eine halbe Umschlingung rund gleich 5. Für eine ganze Umschlingung, also für $\alpha = 2\pi$, wird dann T_1 schon gleich 25 T_0 und für eine zweimalige Umschlingung wird $T_1 = 625\ T_0$. Man macht von diesem starken Anwachsen des Verhältnisses zwischen den Spannungen beider Seilenden unter Anderem Gebrauch, um ein landendes Schiff festzuhalten. Wenn das zu diesem Zwecke dienende Seil mehrmals um einen starken Pfahl geschlungen wird, vermag ein einzelner Mann, der das Seilende anfasst, das Abgleiten gegenüber der grossen Kraft, mit der das Schiff an dem Seile zieht, zu verhüten.

Auch bei der Berechnung der Riementriebe macht man von Gl. (88) Gebrauch. Hier steht die Riemenscheibe allerdings nicht fest. Das Gleiten des Riemens auf dem Scheibenumfange muss aber ebenfalls verhütet werden. Daher darf T_1 nicht grösser als der in Gl. (88) gegebene Werth werden und um eine gewisse Sicherheit gegen das Abgleiten zu haben, macht man es etwas kleiner. Zugleich erkennt man, dass beide Riementrume gespannt sein müssen. Die Differenz beider Riemenspannungen ist die am Scheibenumfange wirkende treibende Kraft. — Eine andere Anwendung von Gl. (88) ist die zur Berechnung der Bandbremsen. Die Differenz $T_1 - T_0$ wirkt hier als verzögernde Kraft am Umfange der Bremsscheibe. Bei der Construction der Bandbremse weiss man, wie gross die verzögernde Kraft sein muss; man hat damit eine Gleichung für die beiden Unbekannten T_0 und T_1, und eine zweite wird durch Gl. (88) gegeben. Es handelt sich dann nur noch darum, den Bremshebel, an dem das eine Ende des Bremsbandes oder auch beide Enden (bei der Differentialbremse) befestigt sind, so zu construiren, dass die Enden durch die Bedienungsmannschaft genügend angespannt werden können. Die weitere Ausführung dieser Betrachtungen gehört der Maschinenlehre an.

Um die Reibung zu steigern, kann man das Seil auch in

eine Keilnuth legen, die am Scheibenumfange angebracht ist. Abb. 72 deutet dies im Querschnitte an. Der Normaldruck N im vorigen Falle zerlegt sich hier in zwei Componenten, die sich auf die Seitenflächen der Nuth übertragen. Je spitzer der Winkel β zwischen den Seitenflächen ist, desto grösser wird die numerische Summe beider Componenten gegenüber N und in demselben Verhältnisse wächst auch die Reibung. Wenn $\beta = 60^0$ ist, hat sich die Reibung nahezu verdoppelt. Ganz trifft dies nicht zu, weil auch die Componenten, in die N zerlegt wird, den Reibungswinkel mit den Normalen zu den Seitenflächen der Keilnuth einschliessen. Zur Berechnung zerlegt man zunächst eine Kraft N nach diesen beiden Richtungen und ermittelt das Verhältniss der numerischen Summe beider Componenten zu N. In demselben Verhältnisse ist dann f zu vergrössern und dieser vergrösserte Werth in Gl. (88) einzuführen, womit die Aufgabe auf die frühere zurückgeführt ist.

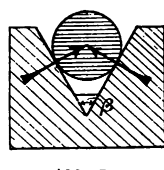


Abb. 72.

§ 41. Seilsteifigkeit.

Ein Seil ist nicht unbedingt biegsam. Der Widerstand gegen die Biegung macht sich um so mehr bemerklich, je kleiner der Krümmungshalbmesser ist, zu dem das Seil gebogen werden soll. Dieser Widerstand kann zum Theil elastischer, zum Theil plastischer Art sein. Wenn er ganz elastisch ist, hat das Seil stets dasselbe Bestreben, sich wieder grad zu strecken. Wird es auf eine Rolle gebracht, so spreizt es sich an der Auflaufstelle um ebenso viel ab, als an der Ablaufstelle. Es bildet sich an beiden Stellen eine Uebergangscurve aus, die den allmählichen Uebergang vom Krümmungsradius ∞ in der graden Strecke bis zum Krümmungshalbmesser r der Rolle vermittelt. Nach den Lehren der Elasticitätstheorie kann die Gestalt der Uebergangscurve ohne Schwierigkeit ermittelt werden. Um eine genauere Berechnung dieser Art handelt es sich hier aber nicht, sondern nur um eine ungefähre Ab-

schätzung darüber, welche Erscheinungen man etwa zu erwarten hat.

Ein Widerstand von plastischer Art wird bei einem gewöhnlichen Hanfseile nicht eigentlich dadurch hervorgerufen, dass das Material im Einzelnen plastisch wäre, wie etwa ein knetbarer Thonklumpen. Die einzelnen Fasern, aus denen das Seil zusammengedreht ist, verschieben sich vielmehr bei einer Biegung gegen einander und dabei sind die Reibungen zwischen den Fasern zu überwinden. Diese inneren Reibungen widersetzen sich jeder Aenderung der grade vorhandenen Gestalt und insofern bewirken sie, dass sich das Seil im Ganzen ähnlich wie ein knetbarer Körper verhält. Wenn der Biegungswiderstand des Seils ausschliesslich von plastischer Art ist, muss es sich an der Stelle, wo es auf die Rolle aufläuft, immer noch abspreizen, so dass der Krümmungshalbmesser allmählich bis auf r abnimmt. An der Ablaufstelle sucht es dagegen den Krümmungshalbmesser r beizubehalten und es entsteht eine Uebergangscurve von S-förmiger Gestalt, die zunächst der Rolle zugewendet ist. Der Krümmungshalbmesser nimmt dabei bis zum Werthe ∞ zu, worauf sich eine Krümmung nach der anderen Seite hin anschliesst, die den Uebergang in die grade Strecke vermittelt. Verlängert man die Mittellinien der graden Seilstrecken, so läuft die auf der Auflaufseite ausserhalb des Kreises vorbei, den die Seilmittellinie auf der Rolle bildet, während die auf der Ablaufseite den Kreis schneidet.

In Wirklichkeit liegt nun das Verhalten eines Seiles zwischen dem rein elastischen und dem rein plastischen. Auf jeden Fall wird dann auf der Auflaufseite ein Abspreizen stattfinden, da hier beide Ursachen in demselben Sinne wirken. Auf der Ablaufseite wirken sie aber im entgegengesetzten Sinne, und es hängt nun von den besonderen Eigenschaften des Seiles ab, welche von beiden überwiegt. Bei Hanfseilen nimmt man häufig an, dass sich beide ungefähr die Wage halten, so dass sich das ablaufende Seil weder abspreizt noch der Rolle zuwendet.

Bei den Berechnungen über die Seilreibung spielt die Seilsteifigkeit keine grosse Rolle. Sie bewirkt nur, dass der im vorigen Paragraphen mit α bezeichnete umspannte Bogen etwas verkleinert wird. Unter gewöhnlichen Umständen macht dies aber nur wenig aus, und gegenüber der Unsicherheit, in der man sich ohnehin über die Grösse des Reibungscoefficienten f befindet, kommt die kleine Verbesserung, die durch die Berücksichtigung der Seilsteifigkeit herbeigeführt werden könnte, kaum in Betracht.

Anders ist es aber bei den Seilrollen. Diese sind um einen in der Rollenmitte angebrachten Zapfen leicht drehbar befestigt. Ohne Berücksichtigung der Seilsteifigkeit und der Zapfenreibung erfordert die Gleichgewichtsbedingung, die in Form einer auf den Zapfenmittelpunkt bezogenen Momentengleichung angeschrieben werden kann, dass beide Seilspannungen einander gleich sein müssen. In Wirklichkeit muss nun freilich schon der Zapfenreibung wegen die Spannung des ablaufenden Seiles etwas grösser sein, als die des auflaufenden, um eine Drehung der Rolle in diesem Sinne hervorzubringen oder sie aufrecht zu erhalten. Das Moment der Zapfenreibung ist aber nicht sehr gross, da der Zapfenhalbmesser viel kleiner zu sein pflegt, als der Rollenhalbmesser. Deshalb kann auch die Zapfenreibung allein nur einen geringen Unterschied zwischen den Spannungen beider Seilenden herbeiführen und diesem Unterschiede gegenüber kann der Einfluss der Seilsteifigkeit sehr ins Gewicht fallen.

Wie die Seilsteifigkeit hier wirkt, ist aus den vorausgehenden Erörterungen über das Verhalten des Seils an der Auflauf- und an der Ablaufstelle leicht zu erkennen. Sie bedingt eine Vergrösserung des Hebelarms der Seilspannung auf der Auflaufseite, während der Hebelarm auf der Ablaufseite je nach dem mehr elastischen oder mehr plastischen Verhalten des Seils entweder weniger vergrössert ist als dort oder ungeändert bleibt oder auch kleiner wird. Jedenfalls ist aber der Hebelarm auf der Auflaufseite grösser geworden, als der auf der Ablaufseite, falls sich nicht etwa das Seil voll-

›mmen elastisch verhalten sollte, was nicht zu erwarten ist. em grösseren Hebelarme entspricht aber eine kleinere Kraft ıd die Seilsteifigkeit bewirkt daher, dass die treibende Kraft ·össer sein muss, als die überwundene.

Auch die energetische Betrachtung des Vorgangs führt ›rigens zu dem gleichen Resultate. Zur Biegung des Seiles uss eine gewisse Arbeitsmenge aufgewendet werden. Wenn e Biegung vollkommen elastisch ist, wird diese nachher ›llständig zurückgewonnen und die Seilsteifigkeit ist ohne .nfluss. Je mehr sich das Seil plastisch verhält, um so ·össer ist dagegen die verlorene mechanische Energie, und ënn es ganz plastisch ist, muss beim Gradstrecken ebenfalls .eder Arbeit aufgewendet werden, anstatt dass solche zurück- wonnen würde.

Je grösser der Rollenhalbmesser im Vergleiche zur Seil- cke und zum Zapfenhalbmesser ist, um so weniger kann sich e Seilsteifigkeit einerseits und die Zapfenreibung andererseits merklich machen und um so kleiner ist daher der Unter- hied zwischen der Spannung des treibenden und des getrie- nen Seilendes. Bei der Anwendung der Seilrollen wünscht ın diesen Unterschied möglichst klein zu haben. Man ver- eicht daher in einem gegebenen Falle das Verhältniss zwischen iden Kräften mit dem Werthe Eins, den es haben müsste, ›nn sich die Reibung und die Seilsteifigkeit ganz vermeiden ssen. Dieses Verhältniss wird als das Güteverhältniss oder ; der Wirkungsgrad der Rolle bezeichnet. Wählt man dafür n Buchstaben η, so hat man

$$S_1 = \eta S_0, \tag{89}$$

›nn S_0 die treibende und S_1 die widerstehende Kraft be- uten. Der Wirkungsgrad η ist demnach ein ächter Bruch, r gewöhnlich nur um einige Hundertel kleiner ist, als Eins. elche Umstände den Werth von η bedingen, ist vorher näher ›rtert worden. Die Berechnung von η auf Grund dieser Be- ıchtungen ist aber kaum zu empfehlen; es ist viel zuver- ›siger, wenn man η unmittelbar durch Versuche bestimmt,

die leicht anzustellen sind. Natürlich kann man aber nur solche Versuchswerthe verwenden, die unter möglichst gleichen Umständen in Bezug auf die Grösse des Rollenhalbmessers und die Beschaffenheit des Seiles und des Zapfens angestellt wurden. Die Aufgabe der Mechanik kann hier nur darin bestehen, auf diese Umstände und die Art, wie sie sich geltend machen, hinzuweisen und dadurch den Blick für die richtige Benutzung der Versuchsresultate zu schärfen. Eine Aufzählung verschiedener Versuchsresultate selbst hätte hier gar keinen Zweck; in dieser Hinsicht muss, wie schon in früheren Fällen, auf die Hülfsbücher für den Constructeur hingewiesen werden.

Wenn ein Seil der Reihe nach um mehrere, etwa um n Rollen geschlungen ist, wie bei einem Flaschenzuge, hat man für die letzte Seilspannung S_n, wie aus der wiederholten Anwenduug von Gl. (89) hervorgeht,

$$S_n = \eta^n S_0 .$$

Man sieht daraus, dass der Wirkungsgrad mit der Zahl der Rollen schnell abnimmt. — Bei einem gewöhnlichen Flaschenzuge trägt die untere Flasche eine Last Q, die von n Seilspannungen aufgenommen wird. Die Gleichgewichtsbedingung besteht darin, dass die Summe dieser Seilspannungen gleich Q ist. Wird also, wie seither, die Spannung des von der oberen Flasche ablaufenden Seiles, von dem aus der Antrieb erfolgt, mit S_0 bezeichnet, so hat man

$$\eta S_0 + \eta^2 S_0 + \eta^3 S_0 + \cdots + \eta^n S_0 = Q,$$

und nach Summirung der Potenzreihe erhält man daraus

$$Q = S_0 \frac{\eta^{n+1} - \eta}{\eta - 1} .$$

Wenn $\eta = 1$ wäre, hätte man $Q = n S_0$, und der Wirkungsgrad η' des ganzen Flaschenzugs ist daher

$$\eta' = \frac{\eta^{n+1} - \eta}{n(\eta - 1)} .$$

Auf weitere Berechnungen dieser Art soll hier nicht eingegangen werden.

§ 43. Die Reibung an der flachgängigen Schraube.

Ich betrachte zunächst den einfachsten Fall, der durch Abb. 73 veranschaulicht ist. Eine Schraube mit flachem Gewinde von geringem Steigungswinkel bewegt sich in einer Mutter, die im Gestelle angebracht ist, und drückt einen Körper mit einer Kraft Q zusammen. Der Antrieb erfolgt durch eine senkrecht zur Schraubenaxe stehende Kraft P, die am Umfange eines Handrades vom Halbmesser p angreift.

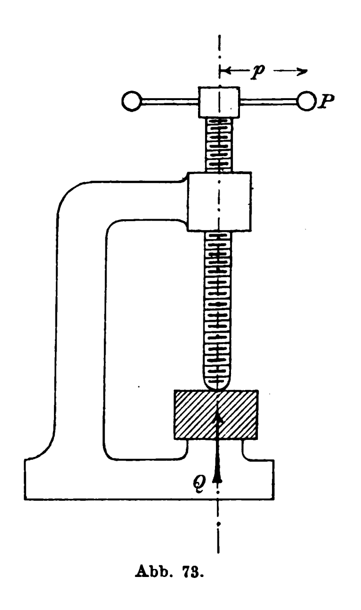


Abb. 73.

Wir müssen zunächst auf die zwischen der Spindel und der Mutter übertragenen Auflagerkräfte achten. Von vornherein ist klar, dass der axiale Druck Q ein Anpressen der oberen Seiten des Spindelgewindes an die nach abwärts gekehrten Schraubenflächen des Muttergewindes veranlasst. Ohne Dazwischenkunft der Reibung wäre der Druck normal zur Schraubenfläche, also nahezu parallel zur Schraubenaxe gerichtet. Wenn die Kraft P nur auf einer Seite des Handrads angreift, kommt dann noch ein Auflagerdruck in der Querrichtung hinzu. Dieser ist aber gegenüber dem anderen verhältnissmässig klein, da Q weit grösser ist als P. Er kann auch ganz vermieden werden, wenn man an Stelle von einer Kraft P zwei treibende Kräfte an gegenüber liegenden Seiten des Handrads wirken lässt, so dass also ein Kräftepaar den Antrieb der Schraube übernimmt. Jedenfalls soll auf den im anderen Falle entstehenden Querdruck und die durch ihn hervorgerufenen Reibungen nicht weiter geachtet werden.

Die Projection des Normaldrucks N auf die Schrauben-

axe sei mit N' bezeichnet. Wenn keine Reibungen auftreten, hat man

$$\Sigma N' = Q$$

als Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in der Richtung der Schraubenaxe. Nahezu gilt diese Gleichung auch noch, wenn Reibungen vorhanden sind. Denn diese fallen in die Richtung der Schraubenfläche, stehen also bei einer Schraube von geringem Steigungswinkel beinahe senkrecht zur Schraubenaxe. Wir wollen uns zunächst mit dieser Annäherung begnügen; um so mehr können wir dann $N' = N$ setzen, denn bei kleinem Neigungswinkel unterscheidet sich eine Strecke von ihrer Projection nur um eine Grösse, die von der zweiten Ordnung klein ist. Wir bilden jetzt die numerische Summe aller Reibungen F. Jedes F ist gleich Nf, und daher wird

$$\Sigma F = f \Sigma N = fQ.$$

Nun denke man sich der Schraube eine Bewegung ertheilt. Die Summe der Arbeitsleistungen aller an ihr wirkenden Kräfte muss dabei gleich Null sein. Für die Durchführung der Rechnung ist es am bequemsten, die Schraubenspindel grade eine volle Umdrehung machen zu lassen. Die Arbeit der Kraft P (oder eines Kräftepaares vom Momente Pp) wird hierbei zu $P 2p\pi$ und positiv, wenn die Bewegung im Sinne von P erfolgt. Wenn die Ganghöhe der Schraube mit h bezeichnet wird, ist die Arbeit von Q gleich $-Qh$, da hier der Weg entgegengesetzt gerichtet ist, wie die Kraft. Die Normalkräfte N leisten keine Arbeit, da die Bewegung rechtwinklig zu ihrer Richtung erfolgt. Die Reibungen F widersetzen sich der Bewegung. Der Weg des Angriffspunktes ist gleich der Länge der zugehörigen Schraubenlinie für einen Umgang. Dieser Weg ist etwas grösser für die mehr nach auswärts liegenden Theile der Schraubenfläche, als für die dem Kerne benachbarten. Da die Unterschiede nicht gross sind und ohnehin auf eine ungefähr gleichförmige Vertheilung von N und daher auch von F der Gewindetiefe nach gerechnet werden kann, genügt es, wenn wir überall die Länge l eines Umganges der in der Gewindemitte liegenden Schraubenlinie als

Weg des Angriffspunktes der Reibungen F in Ansatz bringen. Die Arbeit einer Kraft F ist demnach gleich $-Fl$ und die Summe der Reibungsarbeiten daher gleich $-l\Sigma F$ oder $-lfQ$ zu setzen. Die Summe aller dieser Arbeitsleistungen muss Null sein, und man erhält daher

$$P2p\pi - Qh - Qlf = 0,$$

woraus

$$P = Q\frac{h + lf}{2p\pi} \tag{90}$$

folgt. Wenn die Reibungen ganz vermieden werden könnten, hätte man

$$P = Q\frac{h}{2p\pi},$$

indem man f in Gl. (90) gleich Null setzt. Der Wirkungsgrad der Schraube ist hiernach

$$\eta = \frac{h}{h + lf}. \tag{91}$$

Da der Gewindeumfang l gewöhnlich erheblich grösser als die Ganghöhe h ist, macht auch selbst bei ziemlich kleinem Reibungscoefficienten lf ziemlich viel aus gegenüber h und der Wirkungsgrad der Schrauben — wenigstens solcher von geringer Ganghöhe — ist daher in der Regel gering.

Denkt man sich die Schraube in der umgekehrten Richtung, also im Sinne der Kraft Q bewegt, so kehren sich die Vorzeichen der Arbeiten von P und Q um, das Vorzeichen der Reibungsarbeit bleibt aber negativ, denn die Reibung widersetzt sich der Bewegung nach jeder Richtung hin. Die Arbeitsgleichung wird daher

$$-P2p\pi + Qh - Qlf = 0,$$

und hieraus folgt für das Aufschrauben

$$P = Q\frac{h - lf}{2p\pi}.$$

Wenn lf grösser ist als h, wird P negativ, d. h. Q selbst genügt nicht, um die Rückwärtsbewegung der Schraube herbeizuführen, sondern es muss noch eine Kraft $-P$ dazu kommen, die das Aufschrauben unterstützt. Ein Mechanismus dieser Art, bei dem der Nutzwiderstand Q nach Wegfall der treibenden

Kraft P nicht ausreicht, um einen Rückgang zu veranlassen, wird als selbstsperrend bezeichnet. Die Schraube ist selbstsperrend, wenn lf mindestens gleich h ist. In diesem Falle wird aber der Wirkungsgrad gleich 0,5. Ganz allgemein ist übrigens ein Wirkungsgrad von höchstens 0,5 die Bedingung für einen selbstsperrenden Mechanismus. Der Grund dafür ist leicht einzusehen. Sobald nämlich η kleiner als 0,5 ist, wird der grössere Theil der durch die treibende Kraft zugeführten Energie zur Ueberwindung der Reibungen und der kleinere Theil zur Ueberwindung des Nutzwiderstandes verwendet. Sobald nun die Bewegung umgekehrt, die überwundene Kraft also zur treibenden wird, reicht die von ihr geleistete Arbeit zur Deckung des Arbeitsaufwandes für die Reibungen nicht aus, und es muss daher noch anderweitig Energie zugeführt werden, um die Rückwärtsbewegung zu ermöglichen.

Auf einen Bewegungswiderstand ist übrigens bei der vorausgehenden Betrachtung noch nicht geachtet, der unter Umständen sehr erheblich werden kann. Es ist dies die Reibung zwischen dem unteren Ende der Spindel und dem von der Schraube zusammengedrückten Körper. An der Berührungsstelle wird der erhebliche Druck Q übertragen und daher kommen hier auch Reibungen von grossem Betrage vor. Um ihren Einfluss zunächst möglichst auszuschliessen, war das untere Spindelende in Abb. 73 abgerundet gezeichnet, so dass sich der Druck nur auf einer kleinen Fläche übertragen kann. Man hat dann nur kleine Wege für die Reibungen und die geringen Arbeiten, die diesen entsprechen, konnten in der Arbeitsgleichung unberücksichtigt bleiben. Das ist aber natürlich nicht immer so, und bei der Berechnung eines Schraubenmechanismus muss man sorgfältig auf alle Flächen achten, zwischen denen sich ein Normaldruck von erheblicher Grösse übertragen kann. Für jede Druckübertragungsfläche, die hinzukommt, ist noch ein neues Glied in die Arbeitsgleichung einzuführen. Es würde zu weit führen, alle Anordnungen, die in Frage kommen können, hier im Einzelnen

durchzusprechen; es ist aber auch nicht nöthig, da die Aufstellung der Arbeitsgrössen, die in die Gleichgewichtsbedingung einzuführen sind, nach den früher dafür gegebenen Lehren immer leicht möglich ist.

Bei Schrauben von kleiner Ganghöhe, wie sie gewöhnlich verwendet werden, genügt in der Regel die vorausgehende einfachere Betrachtung. In anderen Fällen muss sie aber durch eine genauere ersetzt werden, was jetzt geschehen soll. Zur Verdeutlichung ist in Abb. 74a ein einzelner Gewindeumlauf und in Abb. 74b eine Abwicklung der zugehörigen mittleren Schraubenlinie (in anderem Maassstabe) gezeichnet. Der Steigungswinkel, der mit α bezeichnet ist, kann jetzt eine beliebige Grösse (zwischen 0 und einem Rechten) haben. Wir dürfen jetzt nicht mehr die Projection N' von N auf die Axe gleich N und die Projection F' von F gleich Null annehmen. Vielmehr hat man

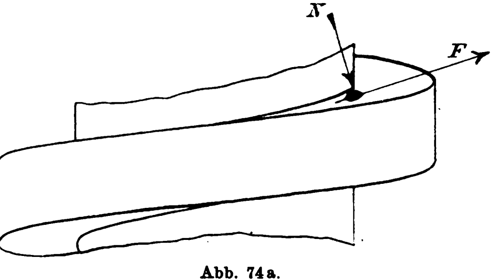


Abb. 74a.

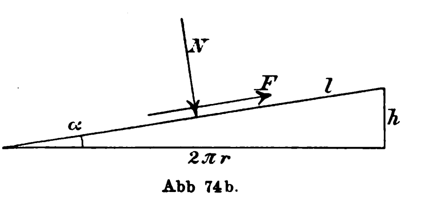


Abb 74b.

$$N' = N \cos \alpha; \quad F' = F \sin \alpha = Nf \sin \alpha.$$

Die Pfeile von N und F sind so in die Figur eingetragen, wie sie den Kräften von der Mutter her auf die Spindel entsprechen; dabei ist F so gerichtet, dass es sich dem Einschrauben widersetzt, wie aus dem Vergleiche von Abb. 74 mit Abb. 73 leicht zu erkennen ist. Die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht der an der Spindel wirkenden Kräfte gegen Verschieben in der Richtung der Axe lautet jetzt

$$Q + \Sigma F' - \Sigma N' = 0$$

oder nach Einsetzen der Werthe von F' und N'

$$Q + f \sin\alpha \Sigma N - \cos\alpha \Sigma N = 0.$$

Hieraus folgt

$$\Sigma N = \frac{Q}{\cos\alpha - f\sin\alpha} \quad \text{und} \quad \Sigma F = f \Sigma N = \frac{Qf}{\cos\alpha - f\sin\alpha}.$$

Unter ΣF ist hier wieder die numerische Summe der Reibungen, also die Summe ohne Berücksichtigung der Richtungen verstanden. Die Arbeitsgleichung für das Einschrauben um einen Umlauf lautet jetzt

$$P 2 p \pi = Q h + \frac{Qf}{\cos\alpha - f\sin\alpha} l.$$

Daraus folgt für das zum Einschrauben erforderliche Moment Pp

$$Pp = Q \frac{h\cos\alpha - hf\sin\alpha + fl}{2\pi(\cos\alpha - f\sin\alpha)}.$$

Man kann diese Gleichung auf eine einfachere Form bringen, wenn man h und l im mittleren Halbmesser r des Gewindes (gerechnet von der Schraubenaxe bis zur Gewindemitte) ausdrückt. Man hat nämlich $h = 2\pi r \operatorname{tg}\alpha$ und $l = \frac{2\pi r}{\cos\alpha}$. Setzt man dies ein, kürzt mit 2π und dividirt Zähler und Nenner mit $\cos\alpha$, so geht die Gleichung über in

$$Pp = Qr \frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{1 - f\operatorname{tg}\alpha}. \tag{92}$$

Auch dies wird noch vereinfacht, wenn man an Stelle des Reibungscoefficienten f den Reibungswinkel φ mit Hülfe der Beziehung $f = \operatorname{tg}\varphi$ einführt. Nach der Formel für die Tangente einer Winkelsumme wird

$$Pp = Qr \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \tag{93}$$

Mit $\varphi = 0$ gilt die Gleichung für den Fall, dass kein Arbeitsverlust durch Reibungen vorkommt. Der Wirkungsgrad der Schraube mit flachem Gewinde wird daher nach der genaueren Berechnung

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \tag{94}$$

Die zum Einschrauben erforderliche Kraft P erhöht sich in Folge der Reibungen um so viel, als wenn der Steigungs-

winkel α der Schraube um den Reibungswinkel φ vergrössert wäre.

Bei grösserem Steigungswinkel kann die Schraube auch durch die axiale Kraft Q angetrieben werden, so dass das Moment Pp durch sie überwunden wird. Für diesen Fall kehrt sich der Pfeil der Reibung F in Abb. 74 um. Man hat dann als Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in der Richtung der Axe

$$Q - f \sin\alpha \Sigma N - \cos\alpha \Sigma N = 0$$

und erhält daraus

$$\Sigma N = \frac{Q}{\cos\alpha + f\sin\alpha} \quad \text{und} \quad \Sigma F = \frac{Qf}{\cos\alpha + f\sin\alpha}.$$

Damit wird die Arbeitsgleichung für eine Umdrehung der Spindel

$$Qh = P2p\pi + \frac{Qf}{\cos\alpha + f\sin\alpha} l,$$

woraus durch Auflösen folgt

$$Q = P2p\pi \frac{\cos\alpha + f\sin\alpha}{h\cos\alpha + hf\sin\alpha - fl}.$$

Die Umrechnung von h und l auf r liefert

$$Q = \frac{Pp}{r} \frac{1 + f \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - f}. \tag{95}$$

Führt man noch den Reibungswinkel φ ein, so wird daraus

$$Q = \frac{Pp}{r} \operatorname{cotg}(\alpha - \varphi). \tag{96}$$

Damit der Antrieb durch Q überhaupt möglich sei, muss der Steigungswinkel α grösser als der Reibungswinkel φ sein. Der Wirkungsgrad der Schraube bei diesem Antriebe ist

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{97}$$

Auch bei dieser Betrachtung ist vorausgesetzt, dass andere Reibungen, als die im Gewinde, nicht berücksichtigt zu werden brauchen. Kommen solche vor, so sind entsprechende Glieder in die Arbeitsgleichung einzuführen.

§ 43. Die Reibung an der scharfgängigen Schraube.

Der Gewindequerschnitt sei ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Ebene überall durch die Schraubenaxe geht. Die Schenkellänge sei mit s und die Höhe des Dreiecks, also die Gewindetiefe, mit t bezeichnet (vgl. Abb. 75). Zuerst sei wieder angenommen, dass der Steigungswinkel der Schraube klein ist und dass die sich hieraus ergebenden Vernachlässigungen als zulässig angesehen werden können. Die Projection N' von N auf die Axe folgt dann aus der Proportion

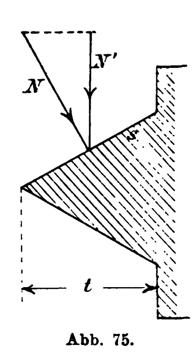


Abb. 75.

$$\frac{N'}{N} = \frac{t}{s}, \quad \text{also} \quad N' = N\frac{t}{s}.$$

Als Componentengleichung für die Richtung der Schraubenaxe erhält man

$$\Sigma N' = Q \quad \text{und hieraus} \quad \Sigma N = \frac{s}{t}Q, \quad \text{also} \quad \Sigma F = \frac{s}{t}Qf.$$

Die Arbeitsgleichung lautet jetzt

$$P2p\pi = Qh + \frac{s}{t}Qfl,$$

woraus P folgt. Der Wirkungsgrad ist

$$\eta = \frac{h}{h + \frac{s}{t}fl}. \tag{98}$$

Er ist unter sonst gleichen Umständen wegen des Factors $\frac{s}{t}$ im zweiten Gliede des Nenners kleiner als bei der flachgängigen Schraube. Dies ist der Grund, weshalb man bei Bewegungsschrauben das flache Gewinde bevorzugt. Bei Befestigungsschrauben ist aber ein möglichst grosser Einfluss der Reibungen grade erwünscht. Dazu kommt noch, dass der dreieckige Gewindequerschnitt bei gleicher Ganghöhe und gleicher Gangtiefe eine grössere Festigkeit des Gewindes zur Folge hat, als der quadratische oder rechteckige. Aus beiden Gründen wählt man für Befestigungsschrauben fast stets das scharfe Gewinde.

Die genauere Rechnung führt zu etwas verwickelteren Formeln. In Abb. 76 sei SS ein kleines Stück der mittleren Schraubenlinie, Q der Gewindequerschnitt, der aber jetzt rechtwinklig zu S gezogen sein möge, und N die Richtung der Normalen. Die Richtungen von N, Q, S stehen rechtwinklig zu einander. Der Winkel von N mit der Schraubenaxe sei mit γ bezeichnet. S bildet mit der Schraubenaxe den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$, wenn α der Steigungswinkel der Schraubenlinie ist. Dieser Winkel kann ebenso wie der Winkel β, den die Gewindeseite Q mit der Schraubenaxe einschliesst, als gegeben angesehen werden. Nach einem bekannten Satze der Stereometrie (oder der analytischen Geometrie des Raumes) ist

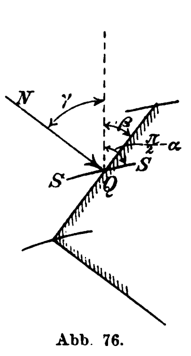


Abb. 76.

$$\cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1,$$

und hieraus folgt

$$\cos\gamma = \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

Demnach ist die Axenprojection N' von N

$$N' = N\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}.$$

Für die Projection F' von F findet man, wie früher,

$$F' = F\sin\alpha = Nf\sin\alpha.$$

Die Componentengleichung für die Axenrichtung lautet

$$Q + f\sin\alpha\,\Sigma N - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}\,\Sigma N = 0.$$

Daraus folgt

$$\Sigma N = \frac{Q}{\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta} - f\sin\alpha}$$

und

$$\Sigma F = \frac{Qf}{\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta} - f\sin\alpha}.$$

Die Arbeitsgleichung geht hiermit über in

$$P2p\pi = Qh + \frac{Qfl}{\sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\beta} - f\sin\alpha}, \tag{99}$$

woraus das Verhältniss von P und Q sowie der Wirkungsgrad genau wie früher gefunden werden können.

Aufgaben.

23. Aufgabe. Auf zwei schiefen Ebenen A und B (Abb. 77a) ruhen die Gewichte P und Q, die durch ein Seil verbunden sind, das über die feste Rolle C geht. Wie gross oder wie klein darf Q grade noch sein, ohne dass eine Störung des Gleichgewichts eintritt, wenn P, der Reibungscoefficient und alle Winkel in der Figur gegeben sind?

Lösung. Der Wirkungsgrad der Rolle weicht nicht viel von der Einheit ab. Im Vergleiche zu den beträchtlichen gleitenden Reibungen der Gewichte P und Q auf den schiefen Ebenen kann daher der Bewegungswiderstand der Rolle in erster Annäherung

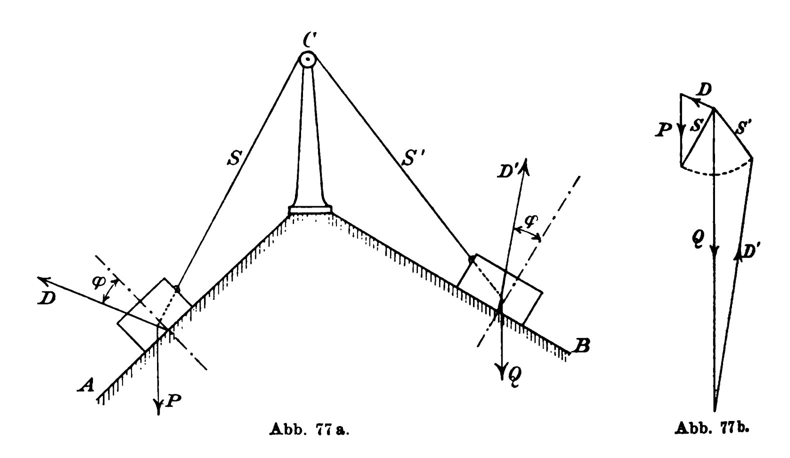


Abb. 77 a. Abb. 77 b.

vernachlässigt werden. Die Seilspannungen S und S' sind also als gleich zu betrachten. Um den grössten Werth von Q zu finden, der mit dem Gleichgewichte noch verträglich ist, trage man an die Normalen der schiefen Ebenen den Reibungswinkel φ nach jenen Richtungen hin an, wie es in der Abbildung geschehen ist. Der bei P in dieser Richtung übertragene Auflagerdruck D muss im Gleichgewichte mit dem Gewichte von P und der Seilspannung S stehen. Man zeichnet ein Kräftedreieck für diese drei Kräfte (vgl. Abb. 77b), findet daraus S, macht S' ebenso gross und reiht Q und D' daran. Damit erhält man $Q_{\max}$. Der kleinste Werth von Q wird erhalten, wenn man die Reibungswinkel nach den entgegengesetzten Seiten von den Normalen aus abträgt und für die so bestimmten Richtungen von D und D' die Construction in Abb. 77b wiederholt. — Wenn es nöthig ist, kann man übrigens

auch den Wirkungsgrad der Rolle, der ebenfalls gegeben sein muss, leicht berücksichtigen. Anstatt S' gleich S in Abb. 77b zu machen, muss man $S' = S : \eta$ eintragen, um den grössten Werth von Q zu finden. Bei der Wiederholung der Construction zur Ermittelung des kleinsten Werthes von Q ist $S' = S \cdot \eta$ zu setzen.

Auch die rechnerische Behandlung der Aufgabe macht an und für sich gar keine Schwierigkeiten. Man muss dann nur alle vorkommenden Kräfte durch Multiplication mit den betreffenden Winkelfunctionen in ihre horizontalen und verticalen Componenten zerlegen und jedes Kräftedreieck durch Anschreiben von zwei Componentengleichungen ersetzen, die hierauf nach den Unbekannten aufgelöst werden können. Die Durchführung der Rechnung erfordert aber erheblich mehr Zeit und Mühe, als die Zeichnung.

24. Aufgabe. Unter welchen Umständen bleibt eine auf den rauhen Fussboden gestellte und auf einer Seite belastete Bockleiter (Abb. 78) im Gleichgewichte?

Lösung. Die beiden Leiterarme sind oben drehbar miteinander befestigt. Der unbelastete Leiterarm kann als gewichtslos angesehen werden; der an seinem unteren Ende auf ihn übertragene Auflagerdruck muss daher den Reibungskreis des oberen Zapfens berühren. Da aber dieser Kreis sehr klein ist gegenüber der Länge der Leiter, fällt der Auflagerdruck genau genug mit der Richtung des unbelasteten Leiterarmes zusammen. Wenn der Winkel ψ, den diese Richtung mit der Normalen zum Fussboden bildet, den Reibungswinkel φ nicht überschreitet, besteht Gleichgewicht, sonst tritt ein Abrutschen ein. — Verbindet man die Leiterarme unten durch eine Schnur, um das Abrutschen zu verhüten, so ist das Gleichgewicht natürlich für jeden Werth des Reibungswinkels und des Winkels ψ gesichert. Die Spannung der Schnur, die erforderlich ist, um das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten, kann ebenfalls leicht ermittelt werden.

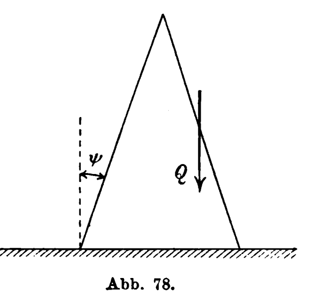


Abb. 78.

25. Aufgabe. Wie gross darf höchstens der Winkel sein, den die beiden Seitenflächen eines Keils miteinander bilden, wenn der Keil selbstsperrend sein soll, so dass er nämlich durch keinen senkrecht zur Mittelebene auf die Widerlagsbacken ausgeübten Druck herausgetrieben werden kann?

Lösung. Die Normale zu einer Seitenfläche darf nicht um mehr als um den Reibungswinkel φ von der Normalen zur Mittelebene abweichen. Daraus folgt, dass der Winkel zwischen den Keilseiten höchstens 2φ betragen darf. — Bei diesem Resultate ist es übrigens unwesentlich, dass der Körper, der festgeklemmt werden soll, grade ein Keil ist. Auch eine Stange, etwa ein Spazierstock, kann zwischen zwei Seitenwände in einem Zimmer von schiefwinkligem Grundrisse festgeklemmt werden, wenn der Winkel zwischen beiden Wänden kleiner als 2φ ist. Zwischen zwei rechtwinklig zu einander stehenden Wänden ist dies nicht möglich, da der Reibungswinkel auch bei den rauhesten Oberflächen nicht bis auf 45^0 ansteigt.

26. Aufgabe. Um wie viel können sich die durch die punktirten Zugstangen auf den in Abb. 79 gezeichneten gleicharmigen Hebel übertragenen Kräfte von einander unterscheiden, ohne dass eine Störung des Gleichgewichts eintritt?

Lösung. Im Grenzzustande des Gleichgewichtes seien P und Q die auf die Endzapfen des Hebels übertragenen Kräfte und es sei $P > Q$. Der Auflagerdruck im Mittelzapfen ist dann gleich $P + Q$. Alle drei Kräfte berühren die Reibungskreise ihrer Zapfen. Wenn die grössere Kraft P am linken Ende des Hebels wirkt, berührt die Richtungslinie von P den zugehörigen Reibungskreis an der rechten Seite. Auch die Richtungslinie von Q berührt den Reibungskreis rechts und die Richtungslinie von $P+Q$ im Mittelzapfen berührt den Reibungskreis links. Man erkennt dies, wenn man darauf achtet, in welchem Sinne die Drehung bei einer Störung des Gleichgewichts erfolgt. Nun schreibe man eine Momentengleichung an für einen Momentenpunkt, der auf der Richtungslinie des Auflagerdruckes $P + Q$ am Mittelzapfen liegt. Der Hebelarm von P ist $p - f'(r + r')$ und der von Q ist $p + f'(r + r')$; die Momentengleichung lautet also

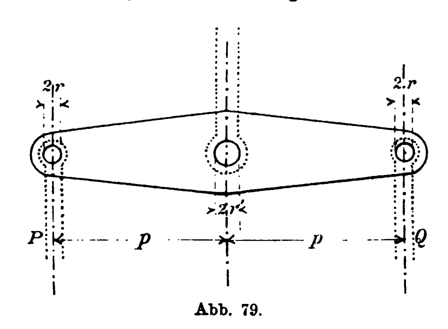


Abb. 79.

$$P(p - f'(r + r')) = Q(p + f'(r + r')).$$

Daraus folgt

$$\frac{\frac{1}{2}(P - Q)}{\frac{1}{2}(P + Q)} = \frac{f'(r + r')}{p}.$$

Ohne Reibung wäre $P = Q$. Der Bruch auf der rechten Seite gibt demnach an, um wie viel sich jede von beiden Kräften wegen der Reibung von ihrem Durchschnittswerthe im Verhältnisse zu diesem Durchschnittswerthe unterscheiden kann, ehe das Gleichgewicht gestört wird. — Zu genauen Abwägungen wäre ein mit Zapfen nach Abb. 79 construirter Hebel natürlich nicht zu brauchen. Bei Wagen muss man die Zapfen durch Schneiden aus hartem Stahle ersetzen, so dass nur die in diesem Falle sehr geringfügige rollende Reibung ins Spiel kommt.

27. Aufgabe. Durch einen Riementrieb soll auf eine Riemenscheibe eine Umfangskraft ΣF oder $T_1 - T_0$ von 100 kg übertragen werden. Wie gross müssen T_1 und T_0 sein, wenn der Riemen die Scheibe auf dem halben Umfange umschlingt und wenn der Reibungscoefficient mit 0,3 in Ansatz gebracht wird, wobei schon eine gewisse Sicherheit gegen Abgleiten gegeben ist?

Lösung. Nach Gl. (85) hat man hier

$$T_1 = T_0 e^{0,3\pi} = T_0 e^{0,942} = 2,565\, T_0.$$

Andererseits ist nach den Bedingungen der Aufgabe

$$T_1 - T_0 = 100 \text{ kg}.$$

Durch Auflösen beider Gleichungen folgt

$$T_0 = 64 \text{ kg}; \quad T_1 = 164 \text{ kg}.$$

28. Aufgabe. Eine Schraubenwinde (Abb. 80; das Gestell ist weggelassen) besteht aus einem Schneckenrade mit Schnecke. Auf der Schneckenradwelle sitzt eine Seiltrommel, an der die Last Q in die Höhe gezogen wird und auf der Schneckenwelle eine Kurbel, von der der Antrieb erfolgt. Man soll den Ausdruck für den Wirkungsgrad der Vorrichtung aufstellen.

Lösung. Die in die Richtung der Schneckenwelle fallende Componente des Zahndrucks zwischen Schneckenrand und Schnecke sei mit Z bezeichnet. Dann hat man für das Rad die Gleichgewichtsbedingung

$$ZR = Q(q' + rf').$$

Hier ist q' gleich dem Halbmesser der Windetrommel plus der halben Seildicke (diese beiden zusammen seien q) plus dem Maasse des Abspreizens des Seiles. Mit r ist der Zapfenradius und mit f' der Zapfenreibungscoefficient bezeichnet. Für die Schraube hat man

$$P 2 p \pi = Zh + Zfl + Zfu.$$

Hier ist wie früher h die Ganghöhe und l die Länge eines mittleren Gewindeumlaufs. Das letzte Glied auf der rechten Seite gibt die zur Ueberwindung der Reibung zwischen dem Gestelle und der Sitzfläche der Schneckenwelle erforderliche Arbeit an. Die Schneckenwelle muss nämlich so gestützt werden, dass sie gegen ein Verschieben nach links hin durch den Zahndruck Z gesichert

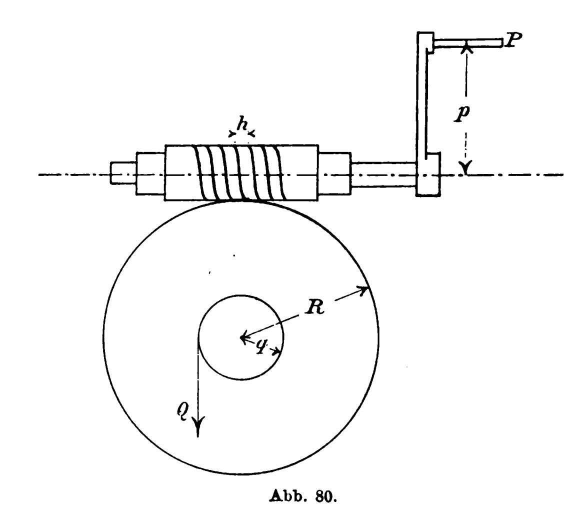


Abb. 80.

ist. Sie überträgt hier den erheblichen Druck Z und der mittlere Werth des Umfangs der Druckfläche ist mit u bezeichnet. — Die Elimination von Z aus beiden Gleichungen liefert

$$Q = \frac{P 2 p \pi}{h + fl + fu} \cdot \frac{R}{q' + rf'}.$$

Setzt man die Reibungscoefficienten gleich Null und $q' = q$, so erhält man

$$Q_0 = \frac{P 2 p \pi}{h} \cdot \frac{R}{q}.$$

Das Verhältniss zwischen Q und Q_0 gibt den Wirkungsgrad an, also

$$\eta = \frac{h}{h + fl + fu} \cdot \frac{q}{q' + rf'}.$$

Für die beiden Factoren, aus denen sich η zusammensetzt, kann man besondere Bezeichnungen einführen. Setzt man

$$\eta_1 = \frac{h}{h + fl + fu} \quad \text{und} \quad \eta_2 = \frac{q}{q' + rf'},$$

so wird η_1 der Wirkungsgrad der Schraube und η_2 der Wirkungsgrad des Wellrades genannt. Eine solche Darstellung des gesammten Wirkungsgrades als ein Product der Wirkungsgrade der einzelnen Theile, aus denen sich eine Vorrichtung zusammensetzt, in der Form

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2$$

ist sehr gebräuchlich und nützlich, weil dadurch der Einfluss jedes Theils auf den ganzen Erfolg übersichtlich zur Anschauung gebracht wird.

29. Aufgabe. Eine homogene Kugel wird auf eine schiefe Ebene aufgesetzt (Abb. 81) und dann losgelassen. Sie wird nach abwärts rollen. Man soll untersuchen, ob sie nur rollt oder ob sie auch gleitet.

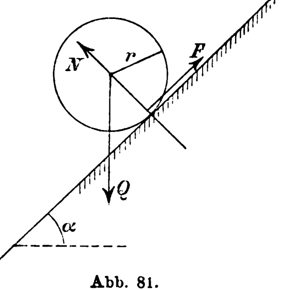


Abb. 81.

Lösung. Wenn die Kugel rollen soll, muss sie neben der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunkts parallel zur schiefen Ebene eine Drehung um die Schwerpunktsaxe annehmen. Bezeichnet v in irgend einem Augenblicke die Geschwindigkeit des Schwerpunkts und u die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, so muss, damit sie rollt,

$$ur = v \quad \text{und daher auch} \quad r\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

sein. Zur Hervorbringung der Winkelbeschleunigung $\frac{du}{dt}$ ist ein Moment M der äusseren Kräfte in Bezug auf den Schwerpunkt nöthig, das nach Gl. (81)

$$M = \Theta \frac{du}{dt}$$

ist. Wir berechnen zunächst das Trägheitsmoment Θ der Kugel für einen Durchmesser. Für drei zu einander senkrechte Durchmesser sind die Trägheitsmomente gleich und ihre Summe $3\,\Theta$ ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze doppelt so gross als die Summe aller Massenelemente multiplicirt mit dem Quadrate der Abstände vom Kugelmittelpunkte. Man denke sich eine Kugelschale vom Halbmesser x und der Dicke dx. Wenn m die Masse der ganzen Kugel ist, kommt davon auf die Kugelschale die Masse

$$dm = m \cdot \frac{4\pi x^2 dx}{\frac{4}{3}\pi r^3} = m \frac{3x^2 dx}{r^3}.$$

Der Beitrag der Kugelschale zu $\frac{3}{2}\Theta$ wird daraus durch Multiplication mit x^2 gefunden. Daher ist

$$\Theta = \frac{2m}{r^3}\int_0^r x^4 dx = \frac{2mr^2}{5}.$$

Setzt man diesen Werth ein, so wird das zur Hervorbringung der Winkelbeschleunigung erforderliche Moment M

$$M = \frac{2mr^2}{5}\frac{du}{dt}.$$

Das Gewicht Q der Kugel und der Normaldruck N der schiefen Ebene gehen durch den Schwerpunkt und haben daher kein Moment. Das Moment M ist daher nur das Moment der gleitenden Reibung F an der Berührungsstelle. Da der Hebelarm von F gleich r ist, hat man

$$F = \frac{2mr}{5}\frac{du}{dt}.$$

Der Normaldruck N muss gleich der Projection des Gewichtes Q auf die Richtungslinie von N sein, weil sich der Schwerpunkt in der Richtung der Normalen nicht verschieben kann. Daraus folgt $N = Q\cos\alpha$. Bildet man dagegen die Componentensumme in der Richtung parallel zur schiefen Ebene, so muss sie nach dem Satze von der Bewegung des Schwerpunktes gleich $m\frac{dv}{dt}$ sein; also

$$Q\sin\alpha - F = m\frac{dv}{dt}.$$

Wir bilden jetzt das Verhältniss zwischen F und N, wobei der Werth von Q aus der letzten und der von F aus der vorhergehenden Gleichung zu entnehmen ist.

$$\frac{F}{N} = \frac{\frac{2mr}{5}\frac{du}{dt}}{\operatorname{cotg}\alpha\left(\frac{2mr}{5}\frac{du}{dt} + m\frac{dv}{dt}\right)}.$$

Wenn nur Rollen und kein Gleiten entstehen soll, muss aber die vorher aufgestellte Gleichung

$$r\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

erfüllt sein. Setzen wir dies in die vorhergehende Gleichung ein, so wird

$$\frac{F}{N} = \operatorname{tg} \alpha \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha .$$

Dieses Verhältniss darf den Reibungscoefficienten f der gleitenden Reibung nicht übersteigen. So lange die Neigung der schiefen Ebene klein ist, wird daher die Kugel nur rollen, ohne zu gleiten. Sobald sie aber so steil geworden ist, dass

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{7}{2} f$$

wird, gleitet sie. Für $f = \frac{2}{7}$ müsste also der Neigungswinkel grösser als 45^0 sein, um ein Gleiten neben dem Rollen zu ermöglichen.

Sechster Abschnitt.

Elasticität und Festigkeit.

---

§ 44. Elasticitätsgrad.

Nicht immer genügt es, einen festen Körper als starr zu betrachten. Sehr häufig ist man genöthigt, auf die kleinen Formänderungen zu achten, die durch den Angriff äusserer Kräfte hervorgerufen werden, z. B. immer dann, wenn man die als Formänderungsarbeit in dem Körper aufgespeicherte Energie in Berücksichtigung ziehen muss. Wenn auch der Weg, den der Angriffspunkt einer den Körper deformirenden Kraft zurücklegt, gewöhnlich nur klein ist, so ist dafür die Kraft, die zu dieser Gestaltänderung aufgewendet werden muss, in der Regel gross, und das Product aus beiden Factoren erlangt daher einen Werth, der nicht vernachlässigt werden darf.

Wenn die Formänderungsarbeit umkehrbar im Körper aufgespeichert ist, so dass man sie beim vollständigen Rückgange der Gestaltänderung vollständig wieder als mechanische Energie zurückgewinnen kann, wird die Formänderung als eine vollkommen elastische bezeichnet. Auch der Körper selbst heisst vollkommen elastisch, wenn er unter gewöhnlichen Umständen nur vollkommen elastische Formänderungen erfährt. Kein Körper bleibt indessen unter allen Umständen vollkommen elastisch. Sobald die Kräfte, die an ihm wirken, ein gewisses Maass überschreiten, wird weder die Gestaltänderung nach Entfernung der Kräfte wieder rückgängig, noch lässt sich die Formänderungsarbeit vollständig zurückgewinnen. Die Grenze,

bis zu der hin sich ein Körper vollkommen elastisch verhält, wird als Elasticitätsgrenze bezeichnet. Freilich ist diese Grenze dadurch nicht bestimmt gekennzeichnet; es hängt vielmehr von der Feinheit der Mittel ab, mit denen wir das Verhalten eines Körpers untersuchen, welche Abweichungen vom vollkommen elastischen Verhalten noch beobachtet werden können. Je feinere Messungen ausgeführt werden, desto tiefer müssen wir die Elasticitätsgrenze rücken. Für die Mechanik entsteht aber hieraus keine Schwierigkeit. So wie früher in erster Annäherung ein fester Körper als materieller Punkt und in zweiter Annäherung als starrer Körper betrachtet wurde, können wir ihn jetzt in dritter Annäherung als vollkommen elastisch betrachten, während es einer vierten Stufe der Untersuchung vorbehalten bleiben kann, die Abweichungen von der vollkommenen Elasticität zu untersuchen. Jede dieser Stufen gibt uns innerhalb gewisser Grenzen vollständig befriedigenden Aufschluss über das wirkliche Verhalten von Naturkörpern; wir dürfen nur bei der Anwendung dieser Lehren niemals die Grenzen ausser Acht lassen, die ihrer Gültigkeit gezogen sind. Die Mechanik des vollkommen elastischen Körpers kann demnach unbekümmert darum, ob es wirklich in aller Strenge vollkommen elastische Körper in der Natur gibt, selbständig durchgeführt werden, indem wir es einer gesonderten Erwägung überlassen, ob die Voraussetzungen, von denen sie ausgeht, in einem gegebenen Falle hinreichend genau zutreffen. Dabei kann indessen sofort bemerkt werden, dass fast alle festen Körper, sofern sie nicht ein ganz ausgesprochen plastisches Verhalten aufweisen, bei hinlänglich kleinen Kräften und Formänderungen gewöhnlich genau genug als vollkommen elastisch betrachtet werden können.

Unter dem Elasticitätsgrade eines unvollkommen elastischen Körpers versteht man das Verhältniss zwischen der umkehrbar aufgespeicherten Formänderungsarbeit zu der ganzen Arbeit, die man zur Herbeiführung dieser Formänderung aufwenden musste. Ein vollkommen plastischer Körper hat demnach den Elasticitätsgrad Null, ein vollkommen elastischer den

Elasticitätsgrad Eins. Um den Elasticitätsgrad durch den Versuch zu bestimmen, pflegte man früher Kugeln aus den Stoffen, die man untersuchen wollte, herzustellen und diese aus einer gewissen Höhe auf eine schwere horizontal aufgelagerte Eisenplatte herabfallen zu lassen. Man beobachtete, um wie viel sie wieder in die Höhe sprangen und setzte das Verhältniss der Sprunghöhe zur Fallhöhe gleich dem Elasticitätsgrade.

Diese Ermittelung steht in ungefährer Uebereinstimmung mit der für den Elasticitätsgrad gegebenen Definition. Denn das Gewicht mit der Fallhöhe multiplicirt liefert die dem Körper vor dem Aufpralle auf die Platte innewohnende lebendige Kraft; diese aber setzt sich beim Stosse in Formänderungsarbeit um, bis die grösste Abplattung der Kugel erreicht ist, worauf rückwärts wieder die Formänderungsarbeit in lebendige Kraft verwandelt und diese auf das Ansteigen der Kugel verwendet wird. Man erkennt aber, dass der Elasticitätsgrad bei einem solchen Versuche im Allgemeinen zu klein gefunden werden muss. Abgesehen von anderen Energieverlusten, etwa durch den Luftwiderstand, kommt hierbei namentlich in Betracht, dass in dem Augenblicke unmittelbar nach dem Abprallen der Kugel, sowohl in dieser als in der Platte die Formänderung noch keineswegs vollständig wieder rückgängig geworden ist und dass ferner auch die Theilchen der Platte in diesem Augenblicke noch eine gewisse kinetische Energie besitzen. Diese kann ebensowenig wie die noch aufgespeicherte Formänderungsarbeit auf die schon abgeflogene Kugel in Form von lebendiger Kraft übertragen werden, selbst wenn die Formänderung vollkommen elastisch gewesen sein sollte. Es liegt dann nicht an einem Mangel an vollkommener Elasticität, sondern an der Gelegenheit zur Umwandlung in mechanische Arbeit, wenn die Formänderungsenergie nicht vollständig in dieser Gestalt zurückgewonnen wird. Vor Allem aber liefert der Versuch mit den Kugeln deshalb ein ziemlich unvollkommenes Bild von dem Elasticitätsgrade, weil sich ein ziemlich starker Druck auf einer kleinen Aufschlagstelle überträgt,

womit die Elasticitätsgrenze an dieser Stelle in der Regel schon überschritten wird, wenn man die Kugeln auch nur aus geringen Höhen (von etwa einem Meter oder darunter) herabfallen lässt.

Um ein zuverlässigeres Urtheil über den Elasticitätsgrad eines Materials bei nicht zu grossen Beanspruchungen zu erhalten, muss man daher vor Allem eine Form wählen, die grössere Wege und daher auch grössere Formänderungsarbeiten zulässt, ohne dass die Elasticitätsgrenze überschritten wird. Körper dieser Art bezeichnet man als Federn (Spiralfedern, Pufferfedern, S-förmige Federn u. s. f.). Man belaste eine solche Feder und notire sich das Maass der Zusammendrückung nach Erreichung gewisser Belastungsstufen. Dann trage man die Last allmählich wieder ab und beobachte von Neuem die zu jeder Belastungsstufe gehörige Zusammendrückung. Das Material der Feder ist vollkommen elastisch, wenn die Zusammendrückung beim Abtragen der Belastung ebenso gross ist, als bei der gleichen Belastungsstufe beim Auftragen der Last. Dass es Körper gibt, die innerhalb ziemlich weiter Grenzen als vollkommen elastisch betrachtet werden können, geht schon aus dieser Bemerkung deutlich genug hervor; denn eine Federwage müsste sich als ganz unzuverlässig und unbrauchbar erweisen, wenn ihre Feder irgendwie erheblich von der vollkommenen Elasticität abwiche.

§ 45. **Festigkeit stabförmiger Körper.**

Im dritten Bande dieser Vorlesungen wird die Festigkeitslehre, die wegen ihrer vielfachen Anwendungen in der Praxis zu den wichtigsten Theilen der technischen Mechanik gehört, ausführlich behandelt. Hier kommt es nur darauf an, einige der einfachsten Fälle zu besprechen und dadurch auf die spätere eingehende Untersuchung vorzubereiten. Deshalb begnüge ich mich hier damit, die Festigkeit grader stabförmiger Körper zu erörtern.

Man unterscheidet sechs einfache Arten der Beanspruchung eines Stabes, nämlich die Beanspruchungen auf Zug, auf Druck,

auf Schub, auf Biegung, auf Torsion oder Verwindung und auf Knicken. — Wenn ein Stab in eine Festigkeitsmaschine gespannt und auseinander gezogen wird, erfährt er Verlängerungen Δl, die mit der Zugkraft P wachsen. Allgemein lässt sich diese Abhängigkeit dadurch ausdrücken, dass man setzt

$$\Delta l = f(P) \quad \text{oder auch} \quad P = \varphi(\Delta l).$$

Die letzte Form, in der die zwischen P und Δl bestehende Gleichung nach P aufgelöst ist, wird häufig vor der anderen bevorzugt. Das durch die Functionen f oder φ ausgedrückte Abhängigkeitsgesetz kann nur durch den Versuch festgestellt werden. Dieser lehrt aber, dass es bei verschiedenen Körpern verschieden ist. Ein Stab aus Walzeisen oder aus Stahl erfährt anfänglich Längenänderungen, die im gleichen Verhältnisse mit den Lasten wachsen (Gesetz von Hooke). Später wächst aber Δl schneller als P. Man bringt die Versuchsergebnisse am besten dadurch zur Anschauung, dass man in passend gewählten Maassstäben Δl als Abscisse und das zugehörige P als Ordinate in ein Diagramm einträgt. Manche Festigkeitsmaschinen sind auch mit Registrireinrichtungen versehen, durch die die Curve, deren Gleichung $P = \varphi(\Delta l)$ ist, selbstthätig aufgezeichnet wird. Abb. 82 gibt den ungefähren Verlauf eines solchen Diagramms für Walzeisen oder Stahl an.

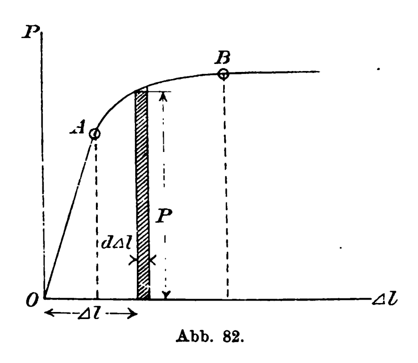


Abb. 82.

Das erste Stück OA ist gradlinig, entsprechend dem proportionalen Anwachsen von P mit Δl oder umgekehrt. Dann kommt ein krummliniges Stück AB, während dessen Δl immer schneller mit P wächst. Gewöhnlich folgt dann auf B eine im Vergleiche zu den beiden früheren sehr lange, nahezu horizontale Linie, von der in der Abbildung nur der Anfang gezeichnet ist. Sehr häufig hebt sich dann im späteren Ver-

laufe die Diagrammlinie wieder etwas steiler an. Sie erreicht dann ein Maximum, von dem sie sich wieder nach abwärts senkt, um darauf abzubrechen, weil der Stab zerreisst. Das Bestehen eines solchen Maximums ist natürlich nur in einer Festigkeitsmaschine zu constatiren. Hätte man die Last unmittelbar an dem Stabe aufgehängt, so müsste er sofort mit Erreichung des Maximums brechen, weil sich die an ihm hängende Last nicht vermindert. In der Festigkeitsmaschine ist dies aber anders. Sie zwingt den Stab nur, eine gewisse Längenänderung Δl anzunehmen, die wir ihm nach Belieben vorschreiben können, so lange der Bruch dabei noch nicht eintritt. Die Kraft, die dazu erforderlich ist, ihn in diesem Zustande Δl zu erhalten, ist nicht durch fremde Bedingungen, sondern durch das Verhalten des Stabes selbst geregelt. Das ursprünglich Gegebene ist also bei dem Versuche in der Festigkeitsmaschine nicht die Last, sondern die erreichte Längenänderung Δl und die Kraft wird — gewöhnlich durch eine Hebelübersetzung — als von Δl abhängige Veränderliche gemessen. Daher kommt auch die vorher erwähnte Bevorzugung der Gleichung $P = \varphi(\Delta l)$ vor ihrer Umkehrung.

Die zu dem Punkte A des Diagramms gehörige Belastung wird als die Proportionalitätsgrenze, die dem Punkte B entsprechende als die Streck- oder Fliessgrenze und die höchste erreichte Last als die Bruchgrenze bezeichnet. Bei einem Druckversuche stehen die Verkürzungen Δl in einem ähnlichen Zusammenhange mit den Lasten P; die dem Punkte B des Diagramms entsprechende Belastung heisst dann die Quetschgrenze.

Wenn Δl um $d\Delta l$ unter der Last P anwächst, leistet P die Arbeit $Pd\Delta l$. Die ganze zur Formänderung aufgewendete Arbeit A der äusseren Kraft ist daher

$$A = \int_0^{\Delta l_1} P d\Delta l, \tag{100}$$

wenn Δl_1 die zuletzt erreichte Längenänderung ist. Im Diagramme wird die Arbeit $Pd\Delta l$ durch die Fläche des schmalen

Streifens von der Grundlinie $d\Delta l$ und der Höhe P angegeben. Unter der Brucharbeit versteht man die ganze bis zum Bruche aufgewendete Arbeit der Kraft P. Diese wird durch die ganze Fläche zwischen der Abscissenaxe und der bis zum Bruche fortgesetzten Diagrammlinie dargestellt.

Bei der Beurtheilung der Güte eines Materials kommt es meistens ebenso sehr und gewöhnlich noch mehr auf die Grösse der Brucharbeit, als auf die Grösse der Bruchlast an. Je grösser die Brucharbeit wird, desto zäher wird das Material genannt. Im Gegensatze zur Zähigkeit steht die Sprödigkeit. Eine scharfe Grenze zwischen beiden Eigenschaften gibt es ebenso wenig wie zwischen Kälte und Wärme. Die Zähigkeit ist namentlich wichtig bei Körpern, die Stössen ausgesetzt sind.

Bei einem Gusseisenstabe oder bei einem Steinprisma, das einem Zuge ausgesetzt wird, fällt die grade Linie OA im Diagramme gewöhnlich fort. Die Diagrammlinie beginnt vielmehr sofort mit der krummen Linie AB und auch die nahezu horizontale Strecke hinter B ist entweder sehr verkürzt oder sie fehlt auch ganz. Darum ist auch die Brucharbeit gering und die genannten Körper sind daher im Allgemeinen als spröde zu bezeichnen. Bei Holz überwiegt gewöhnlich umgekehrt die grade Linie OA. Bald hinter A wird das Verhalten ziemlich unregelmässig, da gewöhnlich schon einige Fasern zu reissen anfangen, während die übrigen noch lange zusammenhalten.

Die Lage der Elasticitätsgrenze lässt sich aus einem einfachen Zugversuche, bei dem man mit der Steigerung der Belastung bis zum Bruche fortfährt, nicht ermitteln. Dazu ist es nöthig, ab und zu innezuhalten und den Stab wieder zu entlasten. Man begnügt sich gewöhnlich damit, festzustellen, ob der Stab wieder so genau, als es die Messvorrichtungen zu erkennen gestatten, seine anfängliche Gestalt erreichte. Wenn dies zutrifft, nimmt man an, dass er sich bis dahin vollkommen elastisch verhalten hat. Eigentlich müsste man auch während des Zurückgehens die zu jedem

Δl gehörige Kraft P ermitteln. Man denke sich die Diagrammlinie in Abbildung 82 bis zu irgend einem Punkte C beschrieben und nun die Entlastung vorgenommen. Man erhält dann während des Zurückgehens eine zweite Diagrammlinie. Fällt diese mit der ersten genau zusammen, so war die Formänderung vollkommen elastisch. Im anderen Falle schliessen beide Diagrammlinien eine Fläche miteinander ein, die die nicht in Form von mechanischer Arbeit zurückgewonnene Energie angibt. Das Verhältniss der zwischen den Diagrammlinien und der Abscissenaxe eingeschlossenen Flächen gibt den Elasticitätsgrad an.

Gusseisen und Steine verhalten sich bei einer erstmaligen Belastung erheblich anders als nach mehrmaliger Wiederholung derselben Belastung. Wenn diese nicht zu gross ist und oft genug aufgebracht wurde, wird auch bei diesen Körpern die Formänderung ziemlich vollkommen elastisch. Freilich fehlt auch dann immer noch das grade Anfangsstück OA der Diagrammlinie.

Der Bruch eines Stabes kann nicht nur durch einmaliges Aufbringen der grössten Belastung, sondern auch schon durch eine weit geringere Last herbeigeführt werden, wenn diese oft genug aufgebracht und wieder entfernt wird. Je grösser die Last selbst ist, desto geringer ist die Zahl der hierzu erforderlichen Wiederholungen. Es gibt aber eine Grenze, unterhalb der auch durch noch so häufige Wiederholung kein Bruch mehr herbeigeführt wird. Hier sei darüber nur im Allgemeinen bemerkt, dass sich diese Grenze gewöhnlich ungefähr mit der Elasticitätsgrenze deckt.

Bei Walzeisen, Stahl und Holz stimmt die Elasticitätsgrenze ungefähr mit der Proportionalitätsgrenze überein. Gewöhnlich begnügt man sich daher damit, nur die letzte unmittelbar zu messen und die erste ihr gleich zu setzen. In den meisten Fällen hat man es bei Festigkeitsberechnungen mit diesen Materialien zu thun. Dabei bleiben die Lasten, die man als zulässig ansieht, der Sicherheit wegen beträchtlich unter der Proportionalitätsgrenze. Man braucht sich dann

nur um das gradlinige Stück OA der Diagrammlinie zu kümmern. Der Zusammenhang zwischen Δl und P kann daher in der Form

$$\Delta l = rP \tag{101}$$

angeschrieben werden, wo nun r eine dem gegebenen Stabe eigenthümliche Constante ist. Gleichung (101) spricht das Hooke'sche Gesetz aus. Die Constante r hängt von der Länge l, dem Querschnitte F und dem Materiale des Stabes ab. Dass sie der Länge des Stabes proportional sein muss, lässt sich leicht daraus erkennen, dass jedes n-tel der Stablänge einem Stababschnitte zugehört, der sich unter den gleichen Bedingungen befindet, wie die übrigen, und dass daher auch ein n-tel der ganzen Längenänderung darauf entfallen muss. Ein Stab vom doppelten Querschnitte lässt sich als aus zwei neben einander liegenden Stäben bestehend auffassen, von denen jeder die Hälfte der ganzen Belastung aufnimmt und daher auch nur um halb so viel gestreckt wird, als wenn er die ganze Last allein zu tragen hätte. Daraus lässt sich vermuthen, dass die Längenänderung und daher die Constante r der Querschnittsfläche umgekehrt proportional ist. Ich sagte ausdrücklich „vermuthen", denn bei der angestellten Ueberlegung wird die Voraussetzung eingeführt, dass sich die ganze Last gleichmässig über den Querschnitt vertheile, was von vornherein nicht ohne Weiteres feststeht. In der That zeigt aber der Versuch, dass die Constante r durch die Formel

$$r = \frac{l}{EF} \tag{102}$$

dargestellt werden kann, in der E nur noch vom Materiale des Stabs abhängt. Aus diesem Versuchsergebnisse kann erst rückwärts darauf geschlossen werden, dass sich bei Stäben unter solchen Bedingungen, wie sie bei der Anstellung jener Versuche vorkommen, die Last in der That wenigstens nahezu gleichförmig über den ganzen Querschnitt vertheilen muss.

Führt man den Werth von r in Gleichung (101) ein, so geht diese über in

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}. \tag{103}$$

Der Quotient $\frac{P}{F}$ gibt an, wie viel Belastung auf die Flächeneinheit des Querschnitts kommt. Wir bezeichnen diese Grösse als die specifische Spannung und gebrauchen dafür den Buchstaben σ, setzen also

$$\sigma = \frac{P}{F}. \tag{104}$$

Hiermit lässt sich Gl. (103) in der übersichtlicheren Form

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} \tag{105}$$

anschreiben. Das Verhältniss der Längenänderung Δl zur ursprünglichen Länge l wird die specifische Längenänderung genannt. Das Verhältniss ist eine absolute Zahl, gewöhnlich ein sehr kleiner Bruch. Daraus folgt, dass auch σ und E Grössen von derselben Dimension sein müssen und dass ferner E eine specifische Spannung von sehr grossem Werthe im Vergleiche zu σ sein muss. Gewöhnlich drückt man die specifischen Spannungen in Atmosphären (abgekürzt atm oder at) aus, worunter man eine Kraft von 1 kg auf 1 qcm versteht. Die Materialconstante E heisst der Elasticitätsmodul, und sie ist daher ebenfalls in dieser Einheit auszumessen. Beiläufig sei erwähnt, dass für Walzeisen und Stahl der Elasticitätsmodul gewöhnlich zwischen 2000000 und 2200000 atm liegt. Die Proportionalitätsgrenze für mittelweiches Flusseisen liegt etwa bei 1800 atm, die Bruchgrenze bei 4000 atm und die als zulässig angesehene Belastung bei 800—1000 atm. Als Sicherheitscoefficient wird oft das Verhältniss zwischen der Bruchlast und der zulässigen Belastung bezeichnet. Nach dem, was vorher über den Einfluss einer oft wiederholten Belastung bemerkt wurde, hat aber eine solche Bezeichnung ernste Bedenken gegen sich; es erscheint vielmehr angemessener, das Verhältniss zwischen der Proportionalitätsgrenze und der zugelassenen Belastung als Sicherheitscoefficient zu bezeichnen.

Sobald man sich über die zulässige Beanspruchung σ_{zul} des Materials entschieden hat, kann man nach Gl. (104) leicht den Querschnitt berechnen, den man einer Zugstange geben muss, die eine gewisse Last P übertragen soll. Dabei laufen

indessen zwei Voraussetzungen unter, die man nicht aus den Augen verlieren darf. Zunächst nämlich muss die äussere Kraft P jedenfalls centrisch angebracht sein, d. h. so, dass ihre Richtungslinie mit der Stabmittellinie in eine Grade fällt. Denn nur in diesem Falle ist eine gleichmässige Vertheilung der Spannungen über den Querschnitt, wie sie bei Gl. (104) vorausgesetzt wird, überhaupt möglich. Legt man nämlich einen Schnitt durch den Stab, so müssen die im Schnitte übertragenen Spannungen im Gleichgewichte mit der äusseren Kraft P an einem Stabtheile stehen. Die Resultirende von Spannungen, die sich gleichförmig über den Querschnitt vertheilen, geht aber durch den Schwerpunkt des Querschnitts, und durch diesen Punkt muss daher auch die Kraft P gehen, um Gleichgewicht mit jener herzustellen.

Aber auch dann, wenn P centrisch wirkt, ist noch keine unbedingte Gewissheit dafür geboten, dass sich die Spannungen gleichförmig über den Querschnitt vertheilen müssen. Man weiss nur, dass dies bei längeren Stäben, wie schon vorher bemerkt wurde, zutrifft, und zwar offenbar, weil sich hier alle Fasern, in die man sich den Stab zerlegt denken kann, ihres Zusammenhangs wegen um gleich viel strecken müssen. Bei gleichen Längenänderungen müssen diese Fasern nach dem Elasticitätsgesetze auch gleiche Spannungen erfahren. Bei kurzen Stäben und namentlich bei den Stabenden, wo die äusseren Kräfte P übertragen werden, können dagegen je nach den besonderen Umständen ungleichförmige Dehnungen der Fasern und daher ungleichförmige Spannungsvertheilungen sehr leicht eintreten. Bei der Anwendung von Gl. (104) muss daher stets eine Erwägung darüber vorausgehen, ob im gegebenen Falle auf eine gleichförmige Spannungsvertheilung zu rechnen ist. — Den Fall der excentrischen Zugbelastung werde ich nachher noch besonders besprechen.

Eine oft behandelte Aufgabe über die gewöhnliche Zugfestigkeit möge hier noch Platz finden. Ein Seil, das in einen tiefen Schacht hinabhängt, hat nämlich ein sehr erhebliches Eigengewicht gegenüber der Nutzlast, die von ihm getragen

wird. Oben muss das Seil stark genug sein, um die um das Eigengewicht vermehrte Nutzlast zu tragen. Wollte man aber das Seil auch bis unten hin ebenso stark machen, so würde dies nicht nur unnützen Materialaufwand und damit verbundene Kosten verursachen, sondern das obere Seilende würde dadurch auch höher belastet, als nöthig ist. Um diesen Schaden zu vermeiden, lässt man den Querschnitt des Seiles nach unten hin derart abnehmen, dass überall die zulässige Beanspruchung des Materials erreicht wird. Man soll das Gesetz ermitteln, nach dem der Querschnitt F eines solchen „verjüngten“ Seiles mit der Entfernung x vom unteren Ende her zunimmt.

Bezeichnet man die zulässige specifische Spannung des Seiles mit $\varkappa$, die Last am unteren Ende mit P_0 und die um das zugehörige Eigengewicht erhöhte Last in der Höhe x mit P, so hat man

$$P_0 = \varkappa F_0; \quad P = \varkappa F.$$

Lässt man x um dx wachsen, so steigt P um das Gewicht des zu dx gehörigen Seilstücks. Das Volumen dieses Seilstücks ist Fdx und das Gewicht gleich $\gamma F dx$, wenn mit γ das specifische Gewicht bezeichnet wird. Man hat demnach

$$dP = \gamma F dx \quad \text{und auch} \quad dP = \varkappa dF.$$

Der Vergleich beider Werthe liefert

$$\gamma F dx = \varkappa dF,$$

eine Gleichung, die nach F aufgelöst werden muss. Zu diesem Zwecke bringen wir sie zunächst auf folgende Form

$$\frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{\varkappa} dx.$$

Links steht das Differential von $\lg F$. Wenn die Differentialien gleich sein sollen, können sich die Stammgrössen nur um eine Constante unterscheiden. Hiernach folgt

$$\lg F = \frac{\gamma}{\varkappa} x + C.$$

Die Integrationsconstante C bestimmt sich aus der Bedingung, dass die Gleichung auch für $x = 0$, also für das untere Seil-

ende zutreffen muss. Dort wird aber F zu F_0 und daraus folgt $C = \lg F_0$. Setzt man dies ein, so erhält man

$$\lg \frac{F}{F_0} = \frac{\gamma}{\varkappa} x$$

oder, indem man vom Logarithmus zum Numerus übergeht,

$$F = F_0 \cdot e^{\frac{\gamma}{\varkappa} x}, \tag{106}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Für die Beanspruchung auf Druck bleiben im Allgemeinen dieselben Betrachtungen gültig, wie für die Zugfestigkeit. Der Hauptunterschied besteht darin, dass ein auf Zug beanspruchter Stab beliebig lang sein kann, ohne an Tragfähigkeit einzubüssen, während sich ein gedrückter Stab seitlich ausbiegt, wenn er im Vergleiche zu seinen Querschnittsabmessungen zu lang gemacht wird. Diese Erscheinung wird als Ausknicken bezeichnet und später besonders besprochen. Jedenfalls kann die Berechnung eines auf Druck centrisch belasteten Stabes nach Gl. (104) immer nur erfolgen, wenn kein Ausknicken zu befürchten ist.

Die Druckfestigkeit ist gewöhnlich mindestens ebenso gross, oft aber erheblich grösser als die Zugfestigkeit, so namentlich bei den Steinen und den künstlich hergestellten steinartigen Massen. Auch beim Gusseisen ist die Druckfestigkeit beträchtlich grösser als die Zugfestigkeit. Eine Ausnahme macht das Holz. Bei diesem ist die Druckfestigkeit gewöhnlich etwas kleiner als die Zugfestigkeit. Wenn nichts anderes darüber gesagt wird, ist übrigens die Angabe der Zug- oder Druckfestigkeit beim Holze immer so zu verstehen, dass die Längsrichtung des Stabes parallel zur Faserrichtung ist und dass also auch die Kraft in dieser Richtung geht. Ein Stab, der aus dem Baumstamme quer zur Hauptrichtung herausgeschnitten würde, hätte viel kleinere Zug- und Druckfestigkeit. Die Zerstörung durch Druck findet übrigens beim Holze dadurch statt, dass sich die dunkel gefärbten, härteren Fasern seitlich ausbiegen und in die weichere und heller gefärbte Zwischenmasse eindringen. Die Erscheinung

lässt sich fast als ein Ausknicken der härteren Fasern bezeichnen, die durch das weichere Zwischenmittel nicht mehr gehindert werden kann.

Von besonderer Bedeutung ist die Druckfestigkeit für Bausteine. Sie wird gewöhnlich an würfelförmigen Stücken ermittelt, die sorgfältig bearbeitet, bei Hartsteinen mit der Diamantsäge geschnitten sind und an den beiden Druckflächen vor dem Versuche noch mit einem Diamanten abgedreht werden, um eine möglichst genau ebene Fläche herzustellen. Das Zerdrücken findet zwischen Stahlplatten statt ohne Zwischenlagen. Die so ermittelte Druckfestigkeit wird auch als die Würfelfestigkeit des Steines bezeichnet. Die specifische Belastung, die den Bruch herbeiführt, ist nämlich hier nicht unabhängig von der Gestalt, also von der Länge und dem Querschnitte des Körpers. Das ist auch leicht erklärlich, wenn man bedenkt, dass das Zerdrücken des Steins nothwendig mit einem seitlichen Ausweichen des Materials verbunden ist und dass die an die Druckplatten unmittelbar angrenzenden Theile durch die Reibung an den Druckplatten an einem Ausweichen gehindert sind. Nach den Versuchen von Bauschinger kann die specifische Bruchbelastung für prismatische Stücke von der Höhe h, dem Querschnitte F und dem Querschnittsumfange u gleich

$$\sqrt{\frac{\sqrt{F}}{\frac{1}{4}u}}\left(\lambda + \nu\frac{\sqrt{F}}{h}\right)$$

gesetzt werden. Für einen quadratischen Querschnitt von der Seite a geht dies über in

$$\lambda + \nu\frac{a}{h}.$$

Die Constanten λ und ν sind für jedes Material durch besondere Versuche zu ermitteln. Die Würfelfestigkeit ist gleich der Summe beider Constanten. Für ein kleines h nimmt die Festigkeit einen grossen Werth an. Der Werth ∞ für $h = 0$ hat keine Bedeutung. Für eine ziemlich grosse Höhe

nähert sich die Festigkeit dem Werthe λ. Indessen darf man h nicht so gross wählen, dass ein Ausknicken in Frage käme. Ueberhaupt ist die Bedeutung einer solchen empirischen Formel nicht zu überschätzen. Sie soll nur einen ungefähren Anhaltspunkt geben. Jedenfalls warnt sie davor, die Würfelfestigkeit ohne Weiteres für die Beurtheilung der Tragfähigkeit eines aus den Steinen aufgeführten Pfeilers als maassgebend anzusehen. Ein Zahlenbeispiel hierzu kommt unter den Aufgaben vor.

Bei der Schubfestigkeit kommt es mehr auf die Gestalt des Querschnitts an, für den ein Abscheeren zu befürchten ist, als auf die übrige Gestaltung des Körpers. Von Wichtigkeit ist die Schubfestigkeit namentlich bei der Berechnung der Nieten. Freilich kommt neben der Beanspruchung auf Abschieben der einen Niethälfte über die andere immer auch eine Beanspruchung auf Biegung hinzu. Die Hebelarme der biegenden Kräfte sind aber hier so klein, dass die Schubfestigkeit die Hauptrolle spielt. Gewöhnlich berechnet man die Nieten ebenfalls nach Gl. (104). Man setzt also eine gleichförmige Vertheilung der Kraft, die der Niet zu übertragen hat, auf den ganzen in Frage kommenden Querschnitt voraus. Freilich ist diese Voraussetzung hier viel weniger gerechtfertigt, als bei der centrischen Zug- oder Druckbeanspruchung. Man kann aber den Fehler, den man damit begeht, dadurch unschädlich machen, dass man die zulässige Schubbelastung, die man der Berechnung zu Grunde legt, aus Versuchen entnimmt, die selbst mit Nietverbindungen der gleichen Art angestellt sind. Für gewöhnliche Nieten, bei denen nur die Festigkeit und nicht die Dichtheit der Naht in Betracht kommt, kann hiernach eine Schubbelastung von etwa 700 atm als zulässig betrachtet werden.

§ 46. Biegung, Knickung und Verwindung.

Ein Stab, der wesentlich auf Biegung beansprucht ist, wird gewöhnlich als Balken bezeichnet. Legt man einen Quer-

schnitt mm durch den Balken (Abb. 83), der ihn in zwei Theile trennt, so müssen die im Querschnitte übertragenen Spannungen im Gleichgewichte mit den äusseren Kräften am einen Balkentheile stehen. Gewöhnlich wählt man den links vom Schnitt liegenden Balkentheil zur Untersuchung des Gleichgewichts aus. Die äusseren Kräfte an diesem Balkentheile sind die daran angreifenden Lasten und der Auflagerdruck A, der in dem durch Abb. 83 dargestellten Falle mit Hülfe einer Momentengleichung sofort berechnet werden kann. Alle diese Kräfte kann man sich parallel nach dem Schwerpunkte des Querschnitts mm verlegt denken. Sie geben dort eine Resultirende, die mit V bezeichnet werden soll und die gleich dem Auflagerdrucke A vermindert um die Summe der Lasten links vom Schnitte ist. Ausserdem tritt wegen der Parallelverlegung noch ein resultirendes Kräftepaar auf, dessen Moment gleich der Summe der Momente der links vom Schnitte liegenden äusseren Kräfte bezogen auf den Querschnittsschwerpunkt ist. Dieses Moment heisst das Biegungsmoment und sei mit M bezeichnet. Damit Gleichgewicht am linken Balkentheile bestehe, müssen sich auch die im Querschnitte mm übertragenen Spannungen zu einer durch den Schwerpunkt gehenden Resultirenden $-V$ und einem Kräftepaare vom Momente $-M$ vereinigen lassen.

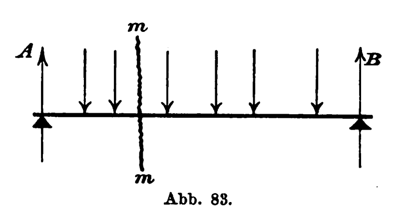


Abb. 83.

Früher war bemerkt worden, dass man von den Sätzen über die Zusammensetzung von Kräften am starren Körper bei Aufgaben der Festigkeitslehre nur mit Vorsicht Gebrauch machen dürfe. Hier sind wir aber zu der vorgenommenen Zusammenfassung der äusseren Kräfte zu der Resultirenden V und dem Momente M berechtigt, weil es sich nur darum handelt, die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die am linken Balkentheile angreifenden Kräfte aufzustellen. Dafür macht es aber keinen Unterschied, wenn dieser Balkentheil als starrer Körper betrachtet wird, da es gar nicht mehr auf

die inneren Kräfte ankommt, die sonst innerhalb dieses Balkentheils auftreten. Die Spannungen im Querschnitte *mm* sind zwar für den ganzen Balken innere, für den linken Balkentheil treten sie aber, nachdem der rechte Balkentheil abgeschnitten ist, als äussere auf.

Die Resultirende V wird als die Scheerkraft für den Querschnitt *mm* bezeichnet. Sie bewirkt, dass im Querschnitte Schubspannungen übertragen werden. Bei den gewöhnlichen Biegungsaufgaben kommt es aber auf diese Schubspannungen nicht an, weil sie viel kleiner sind, als die Normalspannungen, die dem Biegungsmomente M das Gleichgewicht halten. Wir wollen uns daher hier nur um die Normalspannungen kümmern.

Die vorher grade Stabaxe biegt sich unter der Belastung ein wenig durch, so dass sie ihre Hohlseite nach oben hin kehrt. Die Linie, in die sie übergeht, wird als die elastische Linie des Balkens bezeichnet. Denkt man sich vor der Belastung zwei zur Stabaxe senkrechte Querschnitte gezogen, so haben alle zur Stabaxe parallel laufenden Fasern zwischen beiden Querschnitten gleiche Längen. Nach der Formänderung sind sie aber nicht mehr gleich lang; auf der Hohlseite der elastischen Linie, also bei den oberen Fasern tritt eine Verkürzung, bei den unteren eine Verlängerung ein. Wir schliessen daraus, dass die oberen Fasern gedrückt, die unteren gezogen sind und dass die Grösse dieser Spannungen wächst, je weiter die Fasern von der Mitte entfernt sind. Nach welchem Gesetze diese Zunahme mit dem Abstande von der Mitte erfolgt, ist nicht ohne Weiteres klar. Wenn man die Vermuthung aufstellt, dass die Querschnitte bei der Formänderung nicht merklich gebogen werden, wird man zwar zu dem Schlusse geführt, dass die Längenänderung und daher bei Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes auch die Spannung im gleichen Verhältnisse mit dem Abstande von der Mitte wachsen müsste. Dieser Schluss ist aber ebenso unsicher, als die Vermuthung, auf der er beruht. Wenn man in einem solchen Zweifel über das wirkliche Gesetz ist, thut man immer am besten, zunächst zu versuchen, ob man mit der einfachsten Annahme darüber auskommt. Da wir nun

nicht in Zweifel darüber sein können, dass die Spannungen mit der Entfernung von der Mitte wachsen, besteht die einfachste Annahme, die wir machen können, darin, dass die Spannung proportional der Entfernung von der Mitte ist. Als Mitte ist hier allgemein jene Stelle im Querschnitte zu verstehen, an der keine Längenänderung stattfand und an der daher auch die Spannung gleich Null ist, — oder die sogenannte „neutrale" Stelle. Wir nehmen also an, dass zwischen den specifischen Spannungen σ und σ' in zwei Fasern mit den Abständen y und e von der neutralen Stelle die Proportion

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{y}{e} \tag{107}$$

bestehe. Denkt man sich eine Linie im Querschnitte parallel zur Lastrichtung gezogen und an jedem Punkte rechtwinklig zu ihr eine Strecke abgetragen, die den Werth von σ an jener Stelle in einem geeigneten Maassstabe darstellt (vgl. Abb. 84), so erhält man nach Gl. (107) eine grade Linie. Die durch Gl. (107) ausgesprochene wird daher auch als die lineare Spannungsvertheilung bezeichnet. Gl. (107) wird übrigens auch als gültig angesehen, wenn y und e nach verschiedenen Seiten von der neutralen Stelle aus liegen, was durch einen Gegensatz im Vorzeichen zum Ausdrucke gebracht wird. Dann haben auch σ und σ' verschiedene Vorzeichen, d. h. eine von beiden Spannungen bedeutet Zug, die andere Druck.

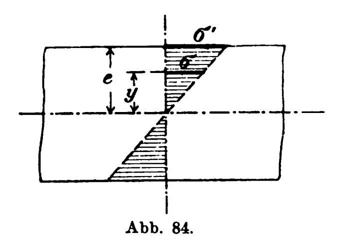


Abb. 84.

Die durch Gl. (107) ausgedrückte Annahme der linearen Spannungsvertheilung hat sich im grossen Ganzen bewährt. Die auf ihr aufgebauten Rechnungen führen nämlich in der Regel zu einer befriedigenden Uebereinstimmung mit der Erfahrung. In manchen Fällen kommen freilich Abweichungen vor, namentlich beim Gusseisen und bei Steinen, also bei Körpern, die dem Hooke'schen Gesetze auch schon bei kleineren Lasten nicht gehorchen. Durch die Anstellung von

blossen Bruchversuchen lässt sich übrigens kein sicheres Urtheil über die mehr oder weniger genaue Gültigkeit von Gleichung (107) bei den gewöhnlich vorkommenden kleineren Lasten gewinnen. Es kann vielmehr kaum ein Zweifel darüber bestehen, dass sich das Gesetz der Spannungsvertheilung ändert, wenn die Lasten so weit erhöht werden, dass der Bruch bevorsteht. Welche Abweichungen von der linearen Spannungsvertheilung bei Steinbalken auftreten, habe ich durch besondere Versuche, bei denen die Längenänderungen verschiedener Fasern unmittelbar gemessen wurden, festgestellt; sie sind nicht so erheblich, als man früher vermuthete. Das Verhalten des Gusseisens ist bis jetzt noch nicht hinreichend aufgeklärt.

Das beste Verfahren besteht darin, dass man zunächst Gl. (107) als gültig ansieht und die sich aus dieser Annahme ergebenden Rechnungsresultate unmittelbar mit der Erfahrung vergleicht. Durch Einführung passender Coefficienten kann man dann den etwa begangenen Fehler nachträglich unschädlich machen. In dieser Hinsicht ist namentlich zu merken, dass die gewöhnlichen Formeln bei Gusseisenbalken zu Bruchspannungen auf der Zugseite führen, die ungefähr doppelt so gross sind, als die Bruchbelastungen bei einem Zugversuche. Bei Steinen ist der Unterschied viel geringer, wenn man den wahren Werth der Zugfestigkeit einsetzt; bei gewöhnlichen Zugversuchen wird dieser nämlich viel zu klein gefunden, weil sich eine gleichmässige Vertheilung der Spannungen über den Querschnitt nur schwer erreichen lässt. Bei Walzeisen, Stahl und auch bei Holz stimmen dagegen die aus Biegungsversuchen abgeleiteten Festigkeitswerthe mit den aus Zug- und Druckversuchen gewonnenen in der Regel ziemlich gut überein.

Wenn der Querschnitt des Balkens eine in die Lastebene fallende Symmetrieaxe hat, müssen alle Punkte, für die $\sigma = 0$ ist, auf einer zu dieser senkrecht stehenden Graden liegen, die als Nulllinie bezeichnet werden soll. — Das Gleichgewicht der am linken Balkentheile angreifenden Kräfte gegen Verschieben in horizontaler Richtung erfordert, dass die algebraische Summe

er Normalspannungen gleich Null ist. Dies liefert die eichung

$$\int \sigma dF = \frac{\sigma'}{e}\int y dF = 0 \quad \text{oder} \quad \int y dF = 0 .$$

e Summirung erstreckt sich über den ganzen Querschnitt. der letzten Form sagt aber die Gleichung aus, dass die ılllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehen muss. ı möchte hier erwähnen, dass ich diese Folgerung auch bei lken aus Gusseisen und aus Steinen von rechteckigem Quer-ınitte durch unmittelbare Messung der Längenänderungen prüft habe und sie dabei nahezu bestätigt fand.

Die Normalspannungen σ liefern ein Kräftepaar, dessen ıment ebenso gross sein muss, als das Biegungsmoment. ese Bedingung wird durch die Momentengleichung

$$M = \int y \sigma dF = \frac{\sigma'}{e}\int y^2 dF$$

sgesprochen. Die sich über den ganzen Querschnitt er-·eckende Summe aus den mit den Quadraten der Abstände n der Schwerlinie multiplicirten Flächentheilen ist uns schon s den Untersuchungen in § 30 bekannt. Sie liefert das ägheitsmoment Θ des Querschnitts für die Nulllinie als Axe. t Einführung dieser Bezeichnung und durch Auflösen nach erhalten wir aus der vorigen Gleichung

$$\sigma' = \frac{M}{\Theta} e . \tag{108}$$

ımit ist unsere Aufgabe im Wesentlichen gelöst. Wir können f Grund von Gl. (108) die an irgend einer Stelle des Quer-ınitts auftretende Normalspannung leicht berechnen. Ge-ihnlich interessirt man sich nur für die grösste Spannung, auftritt, weil von ihr das Eintreten oder Nichteintreten ıes Bruches abhängt. Am grössten wird σ' in der grössten ıtfernung e von der Nulllinie, also in der untersten oder ersten Faser. Oft ist es bequem, an Stelle von Θ den Werth

$$W = \frac{\Theta}{e}$$

zu benutzen, in dem c den Abstand der äussersten Faser angibt. Dieser Werth wird als das **Widerstandsmoment** des Querschnitts bezeichnet. Ebenso wie Θ lässt sich auch W für jede Querschnittsform ein- für allemal vorausberechnen. Nach Einführung von W geht Gl. (108) über in

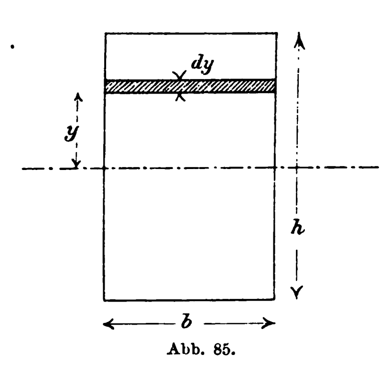


Abb. 85.

$$\sigma' = \frac{M}{W}. \tag{109}$$

Für den rechteckigen Querschnitt soll die Berechnung von Θ und W sofort ausgeführt werden. Ein Streifen von der Breite b, der Höhe dy und dem Abstande y von der Nulllinie (Abb. 85) liefert zu Θ den Beitrag $b dy \cdot y^2$. Daher ist

$$\Theta = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}. \tag{110}$$

Hieraus folgt

$$W = \frac{bh^2}{6} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{6M}{bh^2}.$$

Um die grösste Spannung zu finden, die überhaupt im Stabe vorkommt, muss man natürlich jenen Querschnitt aufsuchen, in dem M seinen grössten Werth annimmt. Bei einer gleichförmig vertheilten Belastung liegt der gefährliche Querschnitt in der Mitte, bei einer Einzellast an der Angriffsstelle der Einzellast.

Man kann sich aber auch die Aufgabe stellen, den Querschnitt des Stabes an jeder Stelle dem dort bestehenden Biegungsmomente anzupassen, so dass in allen Querschnitten gleichzeitig die grösste zulässige Kantenspannung erreicht wird. Ein solcher Stab wird als ein **Körper von gleicher Festigkeit** bezeichnet. Als Beispiel sei der in Abb. 86 gezeichnete Fall eines durch eine Einzellast in der Mitte beanspruchten

Balkens betrachtet. Im Abstande x vom linken Auflager hat das Biegungsmoment die Grösse $\frac{P}{2}x$. Daher muss nach Gl. (109), wenn die zulässige Kantenspannung mit K bezeichnet wird,

$$W = \frac{Px}{2K}$$

gewählt werden, womit das Widerstandsmoment des Querschnitts als Function von x dargestellt ist. Beachtet man noch, dass W eine Länge zur 3. Potenz bedeutet und bei geometrisch ähnlichen Querschnitten daher mit der 3. Potenz einer Seite oder eines Durchmessers wächst, so folgt, dass z. B. der Durchmesser eines kreisförmigen Querschnitts (bei den sog. Tragaxen) der dritten Wurzel aus x proportional gewählt werden muss. Die theoretische Umrisslinie bildet hiernach

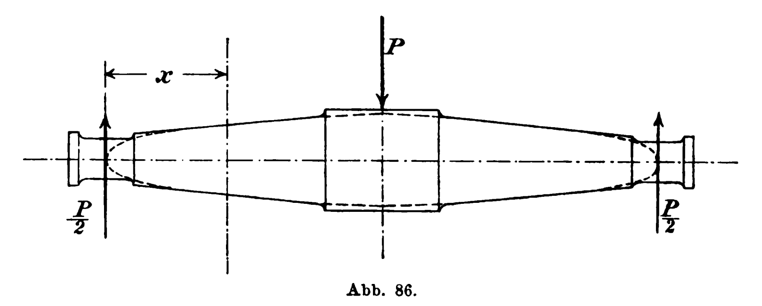


Abb. 86.

eine kubische Parabel, die in der Abb. punktirt angegeben ist. Die wirkliche Umrisslinie ist einfacher, wird aber so gewählt, dass sie sich der theoretischen gut anschliesst. An den Zapfen verliert natürlich die ganze Betrachtung ihre Gültigkeit, schon weil, selbst wenn das Biegungsmoment zu Null wird, immer noch Schubspannungen im Querschnitte übertragen werden müssen, auf die in der Berechnung keine Rücksicht genommen ist.

Bei der Verwendung von gewalzten Eisenbalken ist man an die vorräthigen Sorten gebunden. Für diese sind die Trägheits- und Widerstandsmomente zum Voraus berechnet und in den Profiltabellen und Preislisten aufgeführt. Die

Festigkeitsberechnung gestaltet sich daher in solchen Fällen gewöhnlich sehr einfach. Gegeben sind in der Regel die Spannweite l und die Last Q. Wenn sich diese gleichförmig über die Trägerlänge vertheilt, wird das Biegungsmoment im gefährlichen Querschnitte (in der Mitte)

$$M = \frac{Ql}{8}.$$

Die Spannweite l drücke man in cm, die Last Q in kg aus. Nun kennt man noch die zulässige Belastung des Walzeisens (ungefähr 1000 atm). Durch Einsetzen von σ' und M in Gl. (109) erhält man das erforderliche Widerstandsmoment W auf cm bezogen. Dann schlägt man in der Profiltabelle nach und sucht die passende Grössennummer aus. Ist W in mm ausgedrückt, so beachte man, dass die Dimension von W eine Länge zur dritten Potenz ist. Beim Uebergange von mm auf cm muss man daher drei Stellen abschneiden. Diese Rechnungen sind so einfach, dass sie selbst jedem Maurer- oder Zimmermeister geläufig zu sein pflegen.

Im Anschlusse an die Biegungslehre sind auch die Fälle der excentrischen Zug- oder Druckbelastung zu behandeln. Geht nämlich die parallel zur Stabaxe gerichtete Last P in einem Abstande p vom Schwerpunkte vorbei, so lässt sie sich durch eine centrisch angreifende Last P und ein Kräftepaar vom Momente Pp ersetzen. Die erste bringt gleichförmig über den Querschnitt vertheilte Normalspannungen und das Moment bringt Biegungsspannungen hervor, die sich übereinander lagern. Die Spannung in der äussersten Faser ist daher

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{Pp}{W}. \tag{111}$$

Das Vorzeichen + oder — ist zu wählen, jenachdem man die Spannung an der mit P auf der gleichen Seite der Nulllinie oder auf der entgegengesetzten Seite liegenden äussersten Faser berechnen will.

Auch die Knickfestigkeit eines langen, schlanken Stabes, der einer Druckbelastung P unterworfen wird, hängt mit der

Biegungsfestigkeit zusammen. Wenn die Enden des Stabs drehbar befestigt sind, entsteht bei einem kleinen seitlichen Ausweichen der Mitte um p neben der axialen Belastung P ein Biegungsmoment Pp. Wenn dieses Biegungsmoment gross genug ist, vermag es die vorher zufällig herbeigeführte Ausbiegung aufrecht zu erhalten oder auch noch zu vergrössern. Da hierbei das Moment selbst wiederum anwächst, wird der Bruch durch die fortschreitende Biegung schnell herbeigeführt. Das Gleichgewicht ist in solchen Fällen labil. Dagegen ist es stabil, wenn das Moment Pp nicht ausreicht, um die Ausbiegung um p aufrecht zu erhalten. Der Stab streckt sich dann von selbst wieder grade, wenn er nach der vorgenommenen geringen Biegung sich selbst überlassen wird. Die auf dieser Ueberlegung beruhende Rechnung kann hier noch nicht durchgeführt werden; ich erwähne nur, dass die kritische Belastung P, bei der ein Ausknicken grade möglich wird, durch die Euler'sche Formel

$$P = \frac{\pi^2 E \Theta}{l^2} \tag{112}$$

angegeben wird. Hierin ist E der Elasticitätsmodul, Θ das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts und l die Stablänge. Man sieht immer nur einen gewissen Bruchtheil von P $\left(\text{bei Walzeisen etwa } \frac{1}{5}\right)$ als zulässige Belastung des Stabes an. Vorausgesetzt wird dabei natürlich, dass bei dieser Belastung die zulässige Druckspannung nicht überschritten wird.

Wenn die Enden ganz oder theilweise eingespannt, d. h. gegen eine Drehung gestützt sind, wird das Ausknicken natürlich erschwert. Man trägt dem dadurch Rechnung, dass man als „freie Knicklänge" nicht die ganze Länge l, sondern einen Bruchtheil davon einsetzt. Bei ganz eingespannten Enden vermindert sich die freie Knicklänge auf $0{,}5\,l$, bei weniger sicherer Einspannung ist sie entsprechend grösser anzusetzen. Ist das eine Ende eingespannt und das andere gar nicht festgehalten, so dass es sich auch senkrecht zur Stabaxe verschieben kann, so ist die freie Knicklänge gleich $2l$ zu setzen. — Diese vorläufigen Bemerkungen müssen hier genügen.

Die Beanspruchung auf Torsion oder Verwindung wird durch ein Kräftepaar hervorgerufen, dessen Ebene mit dem Endquerschnitte des Stabs zusammenfällt. Das Moment des Kräftepaars heisst das Verwindungsmoment und sei mit M bezeichnet. Den Anfangsquerschnitt des Stabs muss man sich festgehalten denken. In jedem Zwischenquerschnitte treten Schubspannungen auf, die sich ebenfalls zu einem Kräftepaare vom Momente M zusammensetzen lassen müssen. Ein Anlass zum Auftreten von Normalspannungen ist nicht gegeben; es sei denn, dass neben dem Verwindungsmomente noch eine Biegungsbelastung auftritt, was freilich oft genug vorkommt. Hier schliesse ich aber die Untersuchung solcher Fälle der zusammengesetzten Festigkeit aus und betrachte nur die Beanspruchung auf Torsion für sich.

Die Vertheilung der Schubspannungen über den Querschnitt hängt wesentlich von der Querschnittsform ab. Sie befolgt im Allgemeinen ein viel verwickelteres Gesetz als die Vertheilung der Biegungsspannungen und macht selbst schon beim rechteckigen Querschnitte eingehende Untersuchungen nöthig, die erst im dritten Bande durchgeführt werden können. Einfach wird diese Vertheilung nur beim kreisförmigen oder kreisringförmigen Querschnitte. Zugleich ist diese Querschnittsform aber auch die wichtigste; auf ihre Untersuchung beschränke ich mich hier.

In Folge der elastischen Formänderung der Welle unter dem Einflusse des Verwindungsmoments erfährt der Endquerschnitt eine Drehung um die Stabaxe gegen den Anfangsquerschnitt. Der Winkel heisst der Verdrehungswinkel. Auch zwei benachbarte Querschnitte verdrehen sich ein wenig gegen einander. Dadurch tritt eine relative Verschiebung von je zwei gleichgelegenen Punkten beider Querschnitte auf, die senkrecht zu dem zugehörigen Radius steht und der Entfernung von der Stabaxe proportional ist. Daraus ist zu schliessen, dass auch die Spannungen im Querschnitte proportional dem Abstande von der Mitte zunehmen. Beim kreisförmigen Querschnitte kann also bei der Verwindung ebenso

wie bei der Biegung auf ein lineares Spannungsvertheilungsgesetz gerechnet werden. Zwischen den Schubspannungen τ und τ' in den Abständen r und e von der Mitte besteht hiernach die Proportion

$$\frac{\tau}{\tau'} = \frac{r}{e}, \quad \text{woraus} \quad \tau = \tau' \frac{e}{r}$$

folgt. Die Momentengleichung liefert

$$M = \int \tau dF \cdot r = \frac{\tau'}{e} \int r^2 dF,$$

wobei sich die Summirung über den ganzen Querschnitt erstreckt. Die Summe $\int r^2 dF$ ist das polare Trägheitsmoment Θ_p der Kreisfläche. Die Auflösung nach τ' liefert

$$\tau' = \frac{M}{\Theta_p} e. \tag{113}$$

Die grösste Spannung tritt am Umfange auf. Dort ist $e = a$, wenn der Kreishalbmesser mit a bezeichnet wird. Der Trägheitshalbmesser des Kreises ist nach der in Aufg. 20 durchgeführten Rechnung gleich $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Setzt man dies ein, so erhält man für die grösste Spannung, von der die Festigkeit der Welle abhängt,

$$\tau = \frac{2M}{\pi a^3}. \tag{114}$$

Für alle weiteren Untersuchungen über Elasticität und Festigkeit muss auf den dritten Band der Vorlesungen verwiesen werden.

Aufgaben.

30. Aufgabe. Für Luftziegel fand Bauschinger $\lambda = 20{,}6$ atm, $v = 15{,}8$ atm. Wie viel kann ein daraus errichteter Pfeiler vom Querschnitte 25 × 50 cm und 4 m Höhe tragen, wenn der Sicherheit wegen nur 0,1 der Bruchlast für zulässig angesehen wird?

Lösung. Der Querschnitt F ist hier gleich 1250 cm², daher $\sqrt{F} = 35{,}4$ cm; der Umfang $u = 150$ cm, daher $\frac{u}{4} = 37{,}5$ cm. Die specifische Bruchbelastung folgt daraus zu

$$\sqrt{\frac{35{,}4}{37{,}5}}\left(20{,}6 + 15{,}8 \cdot \frac{35{,}4}{400}\right) = 21{,}3 \text{ atm}.$$

Die zulässige Belastung P ist daher

$$P = 2{,}13 \cdot 1250 = 2660 \text{ kg}.$$

31. Aufgabe. Ein Wasserthurm von 20 m Höhe ist aus Steinen errichtet, die überall mit 10 atm beansprucht werden sollen und deren specifisches Gewicht gleich 2 ist. Wie viel mal so gross muss der Querschnitt am Fusse sein, als am oberen Ende, das die Wasserbelastung unmittelbar aufnimmt?

Lösung. Nach Gl. (106), die für Druckbelastung ebenso wie für Zug gültig bleibt, ist

$$F = F_0 e^{\frac{\gamma}{\varkappa} x}.$$

Hier ist, wenn wir alle Längen in m ausdrücken, $\gamma = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\varkappa = 100000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ und $x = 20$ m. Daher wird

$$F = F_0 e^{0{,}4} = 1{,}492\, F_0.$$

Der horizontale Mauerquerschnitt des Thurmes muss also wegen des Eigengewichts unten um nahezu 50% grösser sein als oben.

Siebenter Abschnitt.

Der Stoss fester Körper.

---

§ 47. Der grade centrale Stoss.

Ein Stoss findet statt, wenn sich zwei Körper auf einander zu bewegen und dabei mit den Oberflächen in Berührung kommen. Die Undurchdringlichkeit der Körper gibt dann einen geometrischen Grund für eine plötzliche Aenderung der Relativbewegung ab. Jeder Grund für die Aenderung einer Bewegung ist aber eine Kraft. Die hier auftretende Kraft wird gewöhnlich als der Stossdruck bezeichnet. Da die Aenderung der Bewegung sehr schnell erfolgt, die Beschleunigung oder Verzögerung der sich stossenden Körper daher sehr gross ist, erlangt auch der Stossdruck in der Regel einen sehr grossen Werth. Daher kommt es, dass beim Stosse leicht ein Bruch oder wenigstens eine bleibende Formänderung der gestossenen Körper eintritt. Davon macht man in der Technik oft mit Vortheil Gebrauch, z. B. beim Arbeiten mit dem Hammer. Wenn die beiden aufeinander stossenden Körper absolut starr wären, müsste die Geschwindigkeitsänderung ohne jeden Zeitaufwand erfolgen; die Beschleunigung oder Verzögerung und hiermit auch der Stossdruck würden dann unendlich gross werden. — Einer unendlich grossen Kraft vermag aber kein Körper zu widerstehen; er müsste, wenn er keiner anderen Formänderung fähig wäre, mindestens zerbrechen. Man erkennt daraus, dass es bei der Behandlung des Stosses nicht genügen kann, sich beide Körper als absolut starr vorzustellen.

Oft wird zwar in der Mechanik von den Stossgesetzen für starre Körper gesprochen; aber mit Unrecht. Das Bild des starren Körpers ist bei der Untersuchung der Stossvorgänge ganz unzureichend, um die Erscheinungen der Wirklichkeit darzustellen. Es ist daher willkürlich und hat keinen physikalischen Sinn, wenn man Betrachtungen darüber anstellt, wie sich zwei Körper beim Stosse verhalten müssten, wenn sie absolut starr wären.

Der Stossdruck ist wie jede andere Kraft dem Wechselwirkungsgesetze unterworfen. Er ist also für beide Körper von gleicher Grösse und von entgegengesetzter Richtung. Wegen des grossen Werthes, den er gewöhnlich erreicht, übertrifft er die unabhängig von dem Stosse sonst etwa noch an den gestossenen Körpern angreifenden Kräfte so bedeutend, dass man während des Stosses diese oft ganz vernachlässigen kann. Man sieht dann am besten von vornherein von diesen Kräften, also z. B. von dem Gewichte der Körper, vollständig ab und behandelt die Aufgabe so, als wenn die Körper frei, also unbeeinflusst von allen anderen aufeinander stiessen. Unzulässig ist diese Betrachtung freilich dann, wenn der Stoss selbst dazu führt, dass an anderen Stellen, etwa an Auflagerungen oder Führungen, Zwangskräfte auftreten, die sonst nicht vorhanden wären. Denn diese können sehr wohl von gleicher Grössenordnung mit dem Stossdrucke sein. Jedenfalls soll aber zunächst der Stoss von zwei völlig frei aufeinandertreffenden Körpern behandelt werden.

Beim Stosse kommt es nur auf die Relativbewegung beider Körper gegen einander an. Denn eine Bewegung, die etwa beide gemeinsam miteinander ausführen, hat keinen Einfluss auf die Annäherung der Körper vor dem Stosse, die sich auch während des Stosses in Folge der Formänderung noch für kurze Zeit fortsetzt. Sie ist daher auch ohne Einfluss auf den Stossdruck und auf die von ihm bewirkten Geschwindigkeitsänderungen. Die gemeinsame Bewegung wird durch den Stoss nicht gehindert und nicht geändert, und man kann daher zunächst ganz von ihr absehen. Alle Fälle des Stosses

von zwei freien Körpern gegen einander lassen sich daher darauf zurückführen, dass der eine Körper ruht, während der andere mit der relativ zu diesem Körper genommenen Bewegung auf ihn zukommt. Wir wollen diesen zur Vereinfachung der Beschreibung den stossenden, den ruhenden Körper aber den gestossenen nennen, obschon sich eigentlich beide gegenseitig stossen. In der That hängt es ganz von unserem Belieben ab, welchen von beiden Körpern wir uns ruhend und welchen wir uns auf ihn zu kommend denken wollen. Es wird also durch diese Vertheilung beider Rollen kein grundsätzlicher Unterschied zwischen beiden Körpern gemacht.

Von dem eben beschriebenen Falle wollen wir jetzt ausgehen. Der Stoss beginnt, sobald die Oberfläche des stossenden Körpers grade in Berührung mit der Oberfläche des gestossenen Körpers gekommen ist. In der Regel wird die Berührung zunächst nur in einem einzigen Punkte stattfinden. Bei einem von beiden Körpern kann dieser Punkt eine Ecke oder auch eine Spitze bilden. Ein zufälliges Zusammentreffen von zwei Ecken miteinander ist aber im Allgemeinen nicht zu erwarten; jedenfalls wollen wir diesen Fall jetzt ausschliessen. Wenn der Berührungspunkt bei keinem von beiden Körpern eine Ecke bildet, haben die Oberflächen der Körper an dieser Stelle eine gemeinsame Berührungsebene. Im Berührungspunkte denken wir uns entweder zu dieser gemeinsamen Berührungsebene oder wenigstens zu der Oberfläche des einen Körpers, wenn der andere mit einer Ecke auftrifft, eine Normale gezogen, die wir als die Stossnormale bezeichnen wollen.

Der Stoss wird grad genannt, wenn der stossende Körper nur eine Translationsbewegung besitzt, deren Richtung mit jener der Stossnormalen zusammenfällt. An der Berührungsstelle bewegen sich dann beide Körper grade aufeinander zu, und es fehlt jede Bewegungscomponente, die ein Gleiten der einen Körperoberfläche gegen die andere herbeizuführen suchte. Dann ist auch keine Veranlassung zum Auftreten einer Reibung zwischen beiden Oberflächen gegeben. Der Stossdruck fällt daher in die Richtung der Stossnormalen.

Der Stoss wird ferner central genannt, wenn die Stossnormale durch die Schwerpunkte beider Körper geht. Mit dem Falle, dass der Stoss gleichzeitig grad und central ist, wollen wir uns in diesem Paragraphen näher beschäftigen. Er lässt sich am einfachsten erledigen, weil bei ihm gar keine Drehungen vorkommen. Denn auch während des Stosses können beide Körper keine Drehbewegungen annehmen, da der Stossdruck, der mit der Richtung der Stossnormalen zusammenfällt, durch die Schwerpunkte beider Körper geht. Wenn es überhaupt genügte, die Körper als starr zu betrachten, könnte man sie daher im Falle des graden centralen Stosses ebenso gut auch unter dem einfacheren Bilde materieller Punkte auffassen. Beide Bilder genügen aber hier nicht wegen der Nothwendigkeit, auf die Formänderungen zu achten, die die Körper während des Stosses erleiden.

Am einfachsten stellt man sich beide Körper als zwei Kugeln vor, von denen die eine auf die andere in der Richtung der Verbindungslinie beider Mittelpunkte zu kommt. Indessen ist eine solche specielle Annahme nicht nöthig, sondern nur, dass die vorher angeführten Merkmale des graden centralen Stosses zutreffen.

Unmittelbar nach Beginn des Stosses dauert die Relativbewegung beider Körper noch einige Zeit fort, indem sie stetig bis auf Null hin abnimmt. So lange sie noch nicht zu Null geworden ist, findet noch eine Annäherung der Schwerpunkte beider Körper gegen einander statt. Diese Annäherung wird ermöglicht durch die Formänderung, die beide Körper an der Berührungsstelle erfahren. Je grösser die Abplattung schon geworden ist, desto grösser wird auch die ihr entsprechende Kraft. Der Stossdruck wächst daher während des Stosses allmählich an, so lange, bis die grösste Abplattung erreicht, also bis die Relativgeschwindigkeit der Körper zu Null geworden ist. Beide Körper haben dann gleiche Geschwindigkeit erlangt. Der gestossene wurde durch den Stossdruck beschleunigt und die Geschwindigkeit des stossenden verzögert, bis beide Geschwindigkeiten einander gleich geworden

sind. Die Zeit vom Beginne des Stosses bis zu diesem Augenblicke wird als die erste Stossperiode bezeichnet.

Wir wollen zunächst die gemeinsame Geschwindigkeit u beider Körper am Ende der ersten Stossperiode berechnen. Die Geschwindigkeit des stossenden Körpers vor dem Stosse sei v_1, sein Gewicht Q_1, und das Gewicht des vorher ruhenden, gestossenen Körpers sei Q_2. Nach dem Satze vom Antriebe Gl. (24) ist

$$\int \mathfrak{P} dt = m\mathfrak{v} - m\mathfrak{v}_0,$$

wenn der Stossdruck in einem gegebenen Augenblicke mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet wird. Nach dem Wechselwirkungsgesetze ist aber $\mathfrak{P}$ für beide Körper von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung. Der Gewinn an Bewegungsgrösse des einen Körpers ist daher gleich dem Verluste der Bewegungsgrösse des anderen. Anstatt dessen kann man auch sagen, dass die Summe der Bewegungsgrössen beider Körper vor, während und nach dem Stosse in jedem Augenblicke denselben Werth behält. Für das Ende der ersten Stossperiode folgt daraus

$$\frac{Q_1 + Q_2}{g} \cdot u = \frac{Q_1}{g} v_1$$

und hieraus

$$u = \frac{Q_1 v_1}{Q_1 + Q_2}. \tag{115}$$

Auf den Fall, dass der eine Körper vor dem Stosse ruhte, lässt sich zwar, wie wir sahen, jeder andere zurückführen. Um die dazu erforderliche Betrachtung nicht jedesmal von Neuem ausführen zu müssen, ist es aber zweckmässig, sofort noch den anderen, häufig vorkommenden Fall ins Auge zu fassen, dass sich beide Körper vor dem Stosse in der Richtung der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte bewegten. Zunächst mögen sich beide in der gleichen Richtung bewegen. Der Körper Q_2 möge mit der Geschwindigkeit v_2 vorangehen und von dem Körper Q_1 mit der grösseren Geschwindigkeit v_1 eingeholt werden. Dann folgt aus dem Satze vom Antriebe, wie vorher,

$$\frac{Q_1 + Q_2}{g} u = \frac{Q_1}{g} v_1 + \frac{Q_2}{g} v_2$$

und hieraus

$$u = \frac{Q_1 v_1 + Q_2 v_2}{Q_1 + Q_2}. \tag{116}$$

Bewegten sich beide Körper vor dem Stosse aufeinander zu, also in entgegengesetzter Richtung, so ist v_2 der umgekehrten Richtung wegen negativ in diese Formeln einzuführen, während sich im Uebrigen nichts ändert. Ein positives Vorzeichen von u bedeutet dann, dass die gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper am Ende der ersten Stossperiode gleichgerichtet mit v_1 ist, ein negatives Vorzeichen, dass sie in die Richtung von v_2 fällt.

Gl. (116) geht auch unmittelbar aus Gl. (115) hervor, wenn man aus dieser an Stelle von u, mit Einrechnung der ursprünglichen gemeinsamen Geschwindigkeit v_2 die gemeinsame Geschwindigkeit $u + v_2$ am Ende der ersten Stossperiode berechnet und an Stelle von v_1 die Relativgeschwindigkeit $v_1 - v_2$ einführt. Man erhält dann aus (115)

$$u + v_2 = v_2 + \frac{Q_1 (v_1 - v_2)}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q_1 v_1 + Q_2 v_2}{Q_1 + Q_2},$$

was mit Gl. (116), in der u schon das ganze $u + v_2$ bezeichnet, gleichbedeutend ist.

Die Bewegungsgrösse bleibt also im Ganzen beim Stosse ungeändert, was auch schon aus dem Satze von der Bewegung des gemeinsamen Schwerpunktes des aus beiden Körpern gebildeten Punkthaufens zu schliessen gewesen wäre. Anders ist es aber mit der lebendigen Kraft. Diese erfährt während der ersten Stossperiode einen Verlust, den wir mit Verl bezeichnen und den wir berechnen wollen. Vor dem Stosse war die lebendige Kraft beider Körper

$$\frac{Q_1 v_1^2}{2g} + \frac{Q_2 v_2^2}{2g}.$$

Am Ende der ersten Stossperiode ist sie

$$\frac{Q_1 + Q_2}{2g} u^2 \quad \text{oder} \quad \frac{Q_1 + Q_2}{2g} \left(\frac{Q_1 v_1 + Q_2 v_2}{Q_1 + Q_2} \right)^2.$$

Der Verlust an lebendiger Kraft ist die Differenz beider Werthe, also

$$2g \cdot \text{Verl} = Q_1 v_1^2 + Q_2 v_2^2 - \frac{(Q_1 v_1 + Q_2 v_2)^2}{Q_1 + Q_2}.$$

Zieht man die Glieder auf der rechten Seite zusammen und ordnet sie, so erhält man

$$\text{Verl} = \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 + Q_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \tag{117}$$

Auch diese Formel bleibt ohne Weiteres anwendbar, wenn v_2 negativ, also entgegengesetzt mit v_1 gerichtet ist. Man erkennt, dass der Verlust nur von der Relativgeschwindigkeit $v_1 - v_2$ abhängt, was auch von vornherein zu erwarten war.

Der Verlust an lebendiger Kraft ist gleich der Arbeit, die zur Formänderung der Körper während der ersten Stossperiode aufgewendet wurde. Wenn man das Gesetz kennt, nach dem sich der Stossdruck P mit der bereits erreichten Abplattung ändert, kann man eine Gleichung aufstellen, die zur Berechnung von P verwendet werden kann. Die Summe der Abplattungen, also die Annäherung der Schwerpunkte beider Körper während der ersten Stossperiode sei mit a bezeichnet. Weiss man, dass P in jedem Augenblicke proportional mit der bereits erreichten Abplattung ist, so ist $\frac{1}{2} Pa$ die zur Formänderung aufgewendete Arbeit, und man hat

$$\frac{1}{2} Pa = \text{Verl} = \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 + Q_2} \cdot \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}. \tag{118}$$

Dazu kommt noch eine Gleichung von der Form $P = ca$, in der der Proportionalitätsfactor c als gegeben zu betrachten ist. Gleichung (118) gestattet dann die Berechnung sowohl von P als von a.

Die Annahme, dass Stossdruck und Abplattung proportional mit einander sind, ist z. B. zulässig, wenn zwei Eisenbahnwagen mit geringer Geschwindigkeit aufeinander stossen, so dass die Formänderung im Wesentlichen im Zusammendrücken der Pufferfedern besteht. Bei Aufgaben dieser Art kennt man gewöhnlich auch von vornherein den Zusammenhang zwischen P und a, also den Proportionalitätsfactor c.

Setzt man a in Gl. (118) gleich Null, so folgt $P = \infty$, d. h. für starre Körper müsste der Stossdruck unendlich gross, oder richtiger — da dieses Resultat keinen Sinn hat — für wenig deformirbare Körper muss der Stossdruck sehr gross werden, was wir schon früher schlossen.

Das Hooke'sche Gesetz der Proportionalität zwischen der Formänderung und der Spannung von Körpern in Stabform gilt für manche Körper überhaupt nicht, für andere wenigstens nur bis zu einer gewissen Grenze. Schon daraus folgt, dass Gl. (118) nicht immer angewendet werden kann, da der Stossdruck P, wenn er nicht durch Einschaltung von Federn, also durch ein grosses a abgeschwächt ist, sehr gross wird. Aber auch abgesehen davon, also schon bei Stössen von geringer Geschwindigkeit, durch die ein Ueberschreiten der Proportionalitätsgrenze nicht herbeigeführt wird, kann auch bei Körpern, die dem Hooke'schen Gesetze gehorchen, nicht ohne Weiteres $P = ca$ gesetzt werden. Jenes Gesetz gilt eben zunächst nur für Körper von stabförmiger Gestalt oder auch für einzelne Elemente eines anders gestalteten Körpers, es kann aber nicht ohne Weiteres auf die gesammte Formänderung eines beliebig gestalteten Körpers übertragen werden. Wenn z. B. zwei Kugeln aufeinander gedrückt werden, nimmt nach einer Untersuchung von Hertz, über die im dritten Bande dieser Vorlesungen näher berichtet ist, die Kraft mit der $\frac{3}{2}$ten Potenz der bereits erreichten Abplattung x zu, also

$$P = cx^{\frac{3}{2}}$$

und hieraus

$$\int_0^a P dx = c\int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx = c \cdot \frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} a P_{\max},$$

und an Stelle von $0{,}5 Pa$ auf der linken Seite von Gl. (118) ist demnach hier $0{,}4 Pa$ einzuführen. Ganz anders gestaltet sich natürlich wieder der Zusammenhang zwischen P und x, wenn bleibende Formänderungen oder überhaupt Abweichungen vom Hooke'schen Gesetze eintreten oder wenn etwa zwei plastische Körper aufeinander stossen. Wenn es sich nur um

eine ungefähre Abschätzung handelt, wird man aber in der Regel von Gl. (118) mit hinlänglicher Genauigkeit auch in solchen Fällen Gebrauch machen können.

Ich komme jetzt zum Verhalten der Körper nach Ablauf der ersten Stossperiode. Dieses hängt vornehmlich vom Elasticitätsgrade ab. Wenn beide Körper vollkommen plastisch sind, ist der Stoss mit der ersten Stossperiode bereits beendigt. Beide Körper setzen dann ihren Weg mit der gemeinsamen Geschwindigkeit u ohne weitere Aenderung fort. Der Stossdruck sinkt plötzlich bis auf Null herab, sobald sich die Körper nicht mehr einander nähern, denn ein Bestreben zur Rückbildung der vorher erlittenen Formänderung besteht beim plastischen Körper nicht. Als Beispiel für einen rein plastischen Stoss möge hier das früher vielfach zur Messung der Geschwindigkeit von Geschossen verwendete ballistische Pendel angeführt werden. Man stelle sich einen Kasten vor, der etwa mit Erde ausgefüllt und an einer langen Stange als Pendel aufgehängt ist. Ein Geschoss, das in den Kasten eindringt und darin stecken bleibt, übt einen plastischen Stoss aus und die nach Gl. (115) berechnete Geschwindigkeit u gibt sofort die Geschwindigkeit nach Beendigung des Stosses an. Die Aufhängung des Kastens an der Stange als Pendel hat nur den Zweck, aus dem zu beobachtenden Pendelausschlage (nach dem Satze von der lebendigen Kraft) einen Schluss auf die Geschwindigkeit u am Ende des Stosses zu ziehen und hiernach die Geschwindigkeit v_1 des Geschosses aus dem Pendelausschlage zu berechnen.

Ein solcher Stoss, der mit der ersten Stossperiode bereits zu Ende ist, wird oft als ein Stoss starrer Körper ausgegeben, offenbar aber mit Unrecht. Ein starrer Körper kann ebensowohl als Grenzfall eines vollkommen elastischen Körpers mit sehr hohem Elasticitätsmodul wie als Grenzfall eines vollkommen plastischen Körpers von grosser Härte angesehen werden. Je nachdem das Eine oder Andere angenommen wird, gelangt man zu verschiedenen Schlüssen über das Verhalten starrer Körper beim Stosse. Dies zeigt eben nur

von Neuem, dass der Stoss starrer Körper kein physikalisch zulässiges Problem bildet.

Wenn der Elasticitätsgrad von Null verschieden ist, hört der Stossdruck mit dem Ende der ersten Stossperiode noch nicht auf. Die Formänderung wird wieder rückgängig und die Schwerpunkte entfernen sich dabei von einander. Die Zeit, während der dies geschieht, bis zu dem Augenblicke, in dem sich die Körper wieder trennen, heisst die zweite Stossperiode. Eine Trennung muss nämlich zuletzt wieder eintreten, denn die zu Anfang der zweiten Stossperiode gleiche Geschwindigkeit u wird durch den Stossdruck bei beiden Körpern im entgegengesetzten Sinne geändert. Die Geschwindigkeiten zu Ende der zweiten Stossperiode, also auch am Ende des ganzen Stosses, seien mit w_1 und w_2 bezeichnet. Wir wollen sie zunächst unter der Annahme berechnen, dass der Stoss vollkommen elastisch erfolgte.

Zur Berechnung von w_1 und w_2 stehen uns zwei Wege offen. Beim vollkommen elastischen Stosse wird die Formänderungsarbeit, die gleich dem in Gl. (117) berechneten Verluste an lebendiger Kraft ist, umkehrbar aufgespeichert und nach Ablauf des ganzen Stosses hat sie sich wieder vollständig in lebendige Kraft zurückverwandelt. Die Unbekannten w_1 und w_2 sind daher durch die beiden Bedingungen bestimmt, dass die Summe der lebendigen Kräfte und auch, wie bei jedem Stosse, die Summe der Bewegungsgrössen nach dem Stosse so gross sein müssen, wie vor dem Stosse. Das ist der eine Weg; beim anderen achtet man darauf, dass beim Rückgängigwerden der vollkommen elastischen Formänderung zu jeder Abplattung dieselbe Kraft gehört, wie beim Anwachsen der Formänderung während der ersten Stossperiode. Jedem Augenblicke der ersten Stossperiode entspricht also ein Augenblick der zweiten Stossperiode mit der gleichen Abplattung, dem gleichen Stossdrucke und daher auch der gleichen Beschleunigung oder Verzögerung für beide Körper. Aus der Gleichheit der Beschleunigungen in beiden Stossperioden folgt auch, dass gleich viel Zeit verfliesst, bis in der zweiten Stoss-

periode eine gewisse Abplattung auf einen kleineren Werth abnimmt, als vorher in der ersten Stossperiode erforderlich war, um die gleiche Zunahme zu bewirken. Die in beiden Stossperioden einander entsprechenden Augenblicke sind daher zeitlich gleich weit vom Ende der ersten Stossperiode entfernt. Beide Stossperioden liegen demnach der Zeit nach symmetrisch zu dem Momente, der ihre Grenze bildet; die eine verhält sich etwa wie ein Spiegelbild zu der anderen.

Aus dieser Betrachtung folgen die Endgeschwindigkeiten w_1 und w_2 fast ohne Rechnung. Die Gesammtänderung der Geschwindigkeit muss nämlich in der zweiten Stossperiode für jeden Körper ebenso gross sein, als in der ersten. Wenn sich also zuerst v_1 bis auf u, also um $v_1 - u$ änderte, so muss sich in der folgenden Stossperiode u nochmals um $v_1 - u$ und im gleichen Sinne ändern; man hat also

$$w_1 = u - (v_1 - u) = 2u - v_1.$$

Einfacher ist es vielleicht noch, wenn man sagt, dass die Geschwindigkeit u an der Grenze beider Stossperioden das arithmetische Mittel aus den Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse ist. Diese Aussage deckt sich mit der vorausgehenden Gleichung. Ebenso wird auch

$$w_2 = 2u - v_2,$$

und wenn man den Werth von u aus Gl. (116) einsetzt, erhält man

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{Q_1 v_1 + Q_2 (2 v_2 - v_1)}{Q_1 + Q_2} \\ w_2 &= \frac{Q_1 (2 v_1 - v_2) + Q_2 v_2}{Q_1 + Q_2} \end{aligned}\right\}. \qquad (119)$$

Es bleibt jetzt noch übrig, die Summe der lebendigen Kräfte am Ende des Stosses, also den Ausdruck L

$$L = \frac{Q_1 w_1^2}{2g} + \frac{Q_2 w_2^2}{2g}$$

zu berechnen. Die unmittelbare Einführung der Werthe von w_1 und w_2 aus den Gleichungen (119) führt zu einer langen und daher schwer zu übersehenden Rechnung. Ich behalte daher zunächst u bei und setze

$$L = \frac{Q_1}{2g}(2u - v_1)^2 + \frac{Q_2}{2g}(2u - v_2)^2$$
$$= 4u^2 \frac{Q_1 + Q_2}{2g} - 4u \frac{Q_1 v_1 + Q_2 v_2}{2g} + \frac{Q_1 v_1^2 + Q_2 v_2^2}{2g}.$$

Die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung heben sich aber gegen einander weg. Den Factor $4u$ haben nämlich beide gemeinsam; ausserdem kommt im ersten Gliede der Factor u noch einmal vor. Setzt man nun an Stelle dieses Factors u den durch Gl. (116) gegebenen Werth von u, so geht in der That, wie man sofort erkennt, das erste Glied in denselben Ausdruck über, wie das zweite; beide heben sich also gegen einander fort. Das hiernach allein übrig bleibende dritte Glied stellt die lebendige Kraft L_0 vor dem Stosse dar und wir können daher an Stelle der vorausgehenden Gleichung auch

$$L = L_0 \tag{120}$$

schreiben. Wir haben uns damit nur überzeugt, dass man auch auf dem jetzt eingeschlagenen Wege zur Berechnung von w_1 und w_2 zu der Folgerung gelangt, dass die lebendige Kraft beider Körper nach dem Stosse ebenso gross ist, als vor dem Stosse. Für den vollkommen elastischen Stoss ist dies aber ein selbstverständliches Resultat; wir hätten daher ebenso gut auch w_1 und w_2 berechnen können, indem wir von Gl. (120) ausgegangen wären und die Gleichung der Bewegungsgrössen

$$Q_1 v_1 + Q_2 v_2 = Q_1 w_1 + Q_2 w_2$$

dazu genommen hätten.

§ 48. Anwendung auf Schlagwerke und Rammen.

Bei einem Schlagwerke ist der in Gl. (117) berechnete, in Formänderungsarbeit umgewandelte Verlust an lebendiger Kraft grade die Nutzarbeit und man sucht daher diesen Betrag möglichst gross zu machen. Es gelingt nämlich nicht, die lebendige Kraft des auftreffenden Hammers oder Bärs vollständig in Formänderungsarbeit umzuwandeln, weil unter dem

starken Stossdrucke auch der Amboss oder überhaupt die Unterlage des gestossenen Körpers etwas nachgibt. Am Ende der ersten Stossperiode haben daher Hammer, Werkstück und Amboss eine Geschwindigkeit u nach abwärts, die nachher freilich unter dem sich ihr widersetzenden Bodendrucke schnell erlischt. Die zur Formänderung des Werkstücks verwendete Energie wird um so grösser, je schwerer der Amboss im Vergleiche zum Hammer ist. Daraus ergibt sich die Vorschrift, den Amboss aus einem grossen Metallstücke herzustellen, das wo möglich mit grossen Fundamentmassen gut verankert sein soll, um auch diese zur Vergrösserung von Q_2 mitwirken zu lassen.

Unter dem Wirkungsgrade eines Schlagwerks versteht man das Verhältniss der in Formänderungsarbeit verwandelten Energie zur kinetischen Energie des auftreffenden Hammers. Dieser Wirkungsgrad hängt auch von dem Werkstücke ab. Um sich davon unabhängig zu machen, kann man ein Werkstück wählen, das für die Aufnahme der Formänderungsarbeit möglichst günstig ist; man findet dann den von der Construction des Schlagwerks allein abhängigen Wirkungsgrad. Hierzu eignet sich am besten ein Cylinder von weichem Kupfer, dessen Höhe man gleich dem Durchmesser macht. Der Cylinder wird unter dem Schlage des Hammers zusammengedrückt. Hat man nun andere Cylinder von derselben Stange unter einer Presse zusammengedrückt und die jedem Grade der Zusammendrückung entsprechende Kraft beobachtet, so folgt daraus die Formänderungsarbeit, die erforderlich ist, um die Zusammendrückung um ein gegebenes Maass herbeizuführen. Der Vergleich mit der lebendigen Kraft des auftreffenden Hammers liefert den gesuchten Wirkungsgrad.

Man kann den Wirkungsgrad auch anders definiren, nämlich so, dass dabei schon auf die Reibung in der Führung des Hammers Rücksicht genommen wird. Bei einem Hammer, der in einer Führung herabfällt, wird nämlich ein Theil der potentiellen Energie, die der Hammer in Folge seines Hubes hatte, zur Ueberwindung der Reibungswiderstände in der Führung

verbraucht. Der Hammer trifft daher schon mit geringerer Geschwindigkeit auf, als es den gewöhnlichen Fallgesetzen entsprechen würde. Nach dem, was früher über die Reibung in Führungen bemerkt wurde, folgt, dass man gut thut, die Hammerführung möglichst lang zu machen, um diesen Verlust zu verringern. Da es nun nicht leicht möglich ist, die Geschwindigkeit des auftreffenden Hammers unmittelbar zu messen, verfährt man am besten so, dass man die ursprünglich gegebene potentielle Energie des Hammers, also die Hubhöhe multiplicirt mit dem Hammergewichte, in Vergleich stellt mit der auf den Kupfercylinder übertragenen Formänderungsarbeit. Ein zur Anstellung genauer Versuche bestimmtes Schlagwerk muss auf diese Art vor seiner Benutzung geaicht werden. Man kann dazu auch Normalkupfercylinder verwenden, deren Verhalten vorher schon festgestellt wurde und die aus einer sich mit solchen Prüfungen befassenden Versuchsanstalt bezogen sind.

Ein Schlagwerk von besonderer Art ist die zum Einschlagen von Pfählen bestimmte Ramme. Durch den Stossdruck wird der Pfahl immer tiefer in den Boden getrieben. Je tiefer der Pfahl schon eingedrungen ist, desto grösser ist die Kraft, die erforderlich ist, um ihn noch weiter zu treiben. Dies liegt nicht so sehr an dem Widerstande, den die Pfahlspitze erfährt, als an der vermehrten Reibung am Umfange des Pfahls. Der von dem Pfahle eingenommene Raum war vorher von Erde ausgefüllt, die jetzt seitlich verdrängt und dadurch stark zusammengedrückt ist. Der Erdboden ist aber nicht eine vollkommen plastische Masse, sondern er ist in mehr oder minder hohem Grade elastisch. Er sucht sich daher wieder auszudehnen und übt einen grossen Druck von der Seite her auf den Umfang des Pfahles aus, der ihn an der Ausdehnung hindert. Dieser Druck ist zunächst ein Normaldruck, also horizontal gerichtet. Ihm entspricht aber auch eine Reibung, die sich sowohl dem tieferen Eindringen des Pfahles, als dem Herausziehen widersetzt. Die Reibung wird um so grösser, je grösser der Normaldruck ist, also je tiefer

der Pfahl im Boden steckt. Beim tieferen Eindringen bleibt nämlich der Druck an den oberen Theilen des Umfangs bestehen, dazu kommt aber noch der Druck auf die unten hinzugetretene Umfangsfläche. Zugleich ist auch in den tieferen Schichten der Seitendruck der Erde gegen den Pfahlumfang im Allgemeinen grösser, weil die Erde dort schwerer seitlich verdrängt werden kann.

Wenn der Pfahl tief genug eingedrungen ist, vermag er eine grosse Last aufzunehmen, ohne weiter einzusinken. Bei der Theorie der Rammen handelt es sich vor allem darum, diese Tragfähigkeit P eines Pfahls zu berechnen, wenn die Bedingungen, unter denen er eingeschlagen wurde, bekannt sind. Als gegeben ist dabei ausser dem Gewichte des Pfahls Q' und des Rammbärs Q sowie der Hubhöhe H namentlich die Strecke h zu betrachten, um die der Pfahl unter einem der letzten Schläge weiter eingedrungen ist. Da das durch einen einzigen Schlag hervorgebrachte Eindringen des Pfahls gewöhnlich sehr klein ist, rechnet man anstatt dessen häufig mit dem Wege, der unter einer Anzahl n aufeinander folgender Schläge zurückgelegt wird. Diese Strecke wird von Zeit zu Zeit während der Ausführung der Rammarbeit gemessen und aus ihr ein Schluss auf die Tragfähigkeit P des Pfahles gezogen. In den folgenden Formeln soll indessen unter h überall der $n$te Theil dieser Strecke, also die Abwärtsbewegung des Pfahles für einen Schlag, verstanden werden.

Die theoretische Ueberlegung, auf der die Rechnung beruht, lässt freilich in allen Fällen viel zu wünschen übrig. Man ist bisher noch nicht einmal darin übereingekommen, welcher Auffassung des Vorgangs man den Vorzug geben soll. Die verschiedenen, ziemlich weit von einander abweichenden Formeln, die heute im practischen Gebrauche stehen, gründen sich nämlich auf zwei völlig von einander verschiedene Vorstellungen, von denen jede ihre Anhänger zählt. Dass sich eine Entscheidung zwischen beiden noch nicht herbeiführen liess, liegt zunächst daran, dass es auch sehr auf das besondere Verhalten des Bodens im einzelnen Falle ankommt und ferner

an der Schwierigkeit, die Grenze der Tragfähigkeit eines Pfahls unmittelbar durch einen Belastungsversuch zu messen, also die Folgerungen der beiden Theorien mit der Wirklichkeit zu vergleichen. Unter diesen Umständen bleibt zunächst nichts Anderes übrig, als sich mit den Grundlagen beider Theorien bekannt zu machen.

Die erste Theorie geht davon aus, während der ersten Stossperiode den Pfahl als freien Körper zu betrachten und die Geschwindigkeit u am Ende dieser Stossperiode nach Gl. (116) zu berechnen, also

$$u = \frac{Qv}{Q + Q'} = \frac{Q}{Q + Q'} \sqrt{2gH}$$

zu setzen. Von jetzt ab berücksichtigt man erst den verzögernden Einfluss der Pfahlreibung, während man umgekehrt auf den noch in die zweite Stossperiode hinein fortdauernden Stossdruck keine Rücksicht mehr nimmt. Dadurch, dass man in der ersten Stossperiode nur den Stossdruck, in der zweiten nur die Pfahlreibung in Ansatz bringt, obschon beide einander entgegenwirkenden Kräfte den ganzen Stoss hindurch andauern, bringt man vielleicht in manchen Fällen einen Ausgleich zu Stande, durch den die bei den einzelnen Vernachlässigungen begangenen Fehler ziemlich aufgehoben werden. Sehr befriedigend ist ein solches Vorgehen freilich nicht.

Um auf Grund dieser Anschauung P zu berechnen, braucht man nur die zur Ueberwindung von P auf dem Wege h geleistete Arbeit gleich der lebendigen Kraft des Pfahles bei der Geschwindigkeit u zu setzen. Es fragt sich dabei, ob man auch die lebendige Kraft des Rammbärs am Ende der ersten Stossperiode in Ansatz bringen soll. Diese Frage ist zu bejahen, denn wenn der Rammbär am Pfahlkopfe haften bliebe, wäre er ohne Zweifel mitzurechnen; springt er aber in die Höhe, so erhält dadurch der Pfahl einen Antrieb nach der Gegenseite, wodurch das Eindringen noch mehr begünstigt wird, als wenn der Bär liegen bliebe. Die Gleichung lautet daher

$$Ph = \frac{Q + Q'}{2g} u^2.$$

Setzt man hier u ein und löst nach P auf, so erhält man

$$P = \frac{Q^2}{Q + Q'} \cdot \frac{H}{h}. \tag{121}$$

Die dem Pfahle in Wirklichkeit zugemuthete Last nimmt man immer nur als einen kleinen Bruchtheil (etwa ein Zehntel) der berechneten Tragfähigkeit P an. Dadurch werden die Bedenken gegen ein so willkürliches Rechenverfahren freilich erheblich abgeschwächt. Ganz lassen sie sich aber dadurch keineswegs beseitigen, denn es ist aus dem ganzen Rechnungsgange durchaus nicht zu erkennen, ob die Fehler unter Umständen nicht selbst so gross werden können, dass sie sich durch die Wahl der zehnfachen Sicherheit (oder einer ähnlichen) nicht mehr verdecken lassen.

Vor allem trägt die Formel (121) einem recht erheblichen Umstande gar keine Rechnung. Man denke sich nämlich den Rammbär von einer ganz geringen Höhe abgelassen. Wenn diese klein genug war, wird auch der Stossdruck nicht ausreichen, um den Widerstand gegen das Eindringen des Pfahles zu überwinden. Der Pfahl wird dann, so oft man den Schlag auch wiederholen mag, überhaupt nicht weiter einsinken. Wollte man nun auf diesen Fall Gl. (121) anwenden, so erhielte man wegen $h = 0$ die Tragfähigkeit $P = \infty$, also nicht nur ein falsches Resultat, sondern auch ein Resultat, das durch die Wahl selbst eines beliebig hohen Sicherheitscoefficienten nicht berichtigt werden könnte.

Man könnte nun zwar nachträglich an Gl. (121) noch eine Verbesserung anbringen, um Fehlschlüssen dieser Art zu entgehen. Damit wird aber die ganze Ableitung der Formel hinfällig und man thut daher, ehe man sich dazu entschliesst, besser, diese Ableitung ganz aufzugeben und eine andere zu wählen, die wenigstens von vornherein darauf eingerichtet ist, allen Umständen Rechnung zu tragen.

Diese zweite Theorie fasst die im herabfallenden Rammbäre aufgespeicherte Energie ins Auge und forscht nach deren Verbleibe. Gegeben ist ursprünglich die Energie QH und in Nutzarbeit wird davon verwandelt der Betrag Ph. Wäre der

Wirkungsgrad η im gegebenen Falle bekannt, so hätte man unmittelbar

$$Ph = \eta QH$$

und hieraus P.*) Um aber ein Urtheil über den Wirkungsgrad η zu gewinnen, müssen wir uns Rechenschaft darüber geben, zu was der nicht in Nutzarbeit übergeführte Antheil der Energie QH verwendet wird. Ein Theil davon kommt ohne Zweifel auf den Stossverlust beim Aufschlagen des Bärs auf den Pfahl, das nicht vollkommen elastisch — aber auch nicht ganz plastisch — erfolgt. Der Sinn der zuerst vorgetragenen Theorie kommt offenbar darauf hinaus, diesem Energieverluste, freilich auf Grund willkürlicher Annahmen, Rechnung zu tragen. Es gibt aber auch noch andere Wege, die von der Energie eingeschlagen werden. Sobald der Bär auffällt, wird der Pfahl zusammengedrückt. Zunächst bewegt sich dabei der Pfahlkopf nach abwärts und ihm folgen die weiter nach abwärts liegenden Theile. Diese nehmen dann auch den Boden, der an ihnen haftet, mit nach abwärts. Erst wenn der Stossdruck gross genug geworden ist, beginnt ein Gleiten des Pfahls gegen den ihn umschliessenden Boden.

Nehmen wir nun zunächst an, der Schlag sei so schwach, dass überhaupt kein Eindringen erfolgt. Die Energie QH wird dann während der ersten Stossperiode in Formänderungsarbeit des Pfahls und des mit ihm zusammenhängenden Erdbodens umgewandelt. In den von der Aufschlagstelle etwas weiter entfernten Theilen des Pfahls und auch im Erdboden selbst wird diese Formänderungsarbeit dem grösseren Betrage nach umkehrbar aufgespeichert sein. Ein Verlust an mecha-

*) In amerikanischen Bauordnungen ist für die Berechnung der Tragfähigkeit von Pfählen die Formel

$$P = \frac{QH}{2{,}5\,h}$$

vorgeschrieben. Hiernach ist $\eta = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$ gewählt. Als zulässige Belastung des Pfahls gilt der sechste Theil von P. (Vgl. Zeitschr. d. Ver. D. Ing., 1899, S. 901.)

nischer Energie ist zunächst im Wesentlichen nur an der Aufschlagstelle selbst zu erwarten.

Die erste Stossperiode ist zu Ende, sobald der frei über den Boden ragende Theil des Pfahls seine grösste Zusammendrückung erlangt hat. Er beginnt sich von da ab wieder zu strecken und wirft den Rammbär noch oben. Während dieser Zeit wird ein Theil der elastischen Formänderungsarbeit in lebendige Kraft zurückverwandelt. Aber nicht die ganze umkehrbar aufgespeicherte Arbeit kann auf den Rammbär übertragen werden. Dieser trennt sich vom Pfahlkopfe, sobald sich der Pfahlkopf langsamer zu bewegen beginnt. In diesem Augenblicke besitzt auch der Pfahl und der benachbarte Boden eine gewisse lebendige Kraft und diese kann ebenso wenig wie die in der Folge noch ausgelöste potentielle Energie auf den schon abgeflogenen Rammbär übergehen. Man erkennt daraus, dass es durchaus kein Beweis für einen geringen Elasticitätsgrad ist, wenn der Bär nicht wieder so weit in die Höhe geworfen wird, als er herabgefallen war. Auch dann, wenn die Formänderung vollkommen elastisch gewesen wäre, hätte ein Theil der ihr entsprechenden Energie nicht wieder auf den Rammbär zurückwandern können. Dieser Theil verliert sich vielmehr erst nachträglich in Erschütterungen des Bodens, die auch auf die angrenzende Luft übergehen und den Schall hervorrufen, der dem Schlage folgt.

Eine genaue rechnerische Verfolgung des jetzt in allgemeinen Umrissen geschilderten Vorganges ist mit Schwierigkeiten verbunden. Es genügt hier nicht, wie im vorausgehenden Paragraphen, die Geschwindigkeiten aller materiellen Punkte eines jeden der beiden sich stossenden Körper als nahezu gleich unter einander anzusehen. Man muss vielmehr darauf achten, dass in jedem Augenblicke verschiedene Punkte des Pfahls und namentlich auch verschiedene Punkte des sich mit ihm elastisch verschiebenden Erdbodens verschiedene Geschwindigkeiten besitzen. Für den Pfahl selbst liessen sich diese Stosswellen zwar hinreichend genau verfolgen, für den Erdboden fehlt es aber an den dazu nöthigen Unterlagen.

Man muss sich daher immer noch mit einer nur näherungsweise zutreffenden Theorie des Vorgangs begnügen.

Als unwirksame Hubhöhe H_0 des Rammbärs möge jene bezeichnet werden, bei der noch kein Eindringen des Pfahls erfolgt, während eine geringe Vergrösserung genügt, um ein Eindringen herbeizuführen. Der Werth von H_0 kann in einem gegebenen Falle hinreichend genau und ohne besondere Schwierigkeit durch einen Versuch festgestellt werden. Wir wollen daher auf jede Schätzung des Werthes von H_0 verzichten, ihn uns vielmehr durch unmittelbare Beobachtung gegeben denken.

Sobald nun die Hubhöhe H grösser ist als H_0, erfolgt ein Eindringen. Zuerst beginnt wie im vorigen Falle die Zusammendrückung des Pfahls und das elastische Nachgeben des Bodens. Die Arbeit, die hierauf zu verwenden ist, ehe noch das Eindringen des Pfahls beginnt, können wir gleich QH_0 setzen. Der Rest $Q(H - H_0)$ ist für die Leistung der Nutzarbeit allein verfügbar. Wir dürfen auch annehmen, dass er zum überwiegenden Theile darauf verwendet wird. Setzen wir also

$$Ph = Q(H - H_0), \tag{122}$$

so werden wir zwar die Tragfähigkeit P des Pfahls etwas, aber voraussichtlich nicht viel zu gross finden. Natürlich wird man auch von dem aus dieser Gleichung berechneten Werthe von P nur einen Bruchtheil als zulässige Belastung des Pfahles betrachten.

Hierbei ist noch darauf zu achten, dass sich der Zustand des durch den Pfahl zusammengedrückten Bodens nach erfolgtem Einrammen mit der Zeit ändern kann. Es können, namentlich bei einem schlüpfrigen Boden, der sich in seinem Verhalten einer sehr zähen Flüssigkeit nähert, kleine, sehr langsam erfolgende Bewegungen eintreten, durch die eine Aenderung in dem Drucke des Bodens auf den Pfahlumfang und hiermit eine Aenderung in der Grösse der Reibung, die sich dem weiteren Eindringen des Pfahles widersetzt, herbeigeführt wird. Schon aus diesem Grunde ist nur mit Vorsicht von den vorausgehenden Rechnungen über die Tragfähigkeit der Pfähle Gebrauch zu machen.

§ 49. **Der grade excentrische Stoss.**

Hier betrachte ich wieder zwei Körper, die als frei angesehen werden können. Von den in § 47 angenommenen Voraussetzungen lasse ich nur die eine fallen, dass die Stossnormale durch die Schwerpunkte beider Körper gehe. Es genügt, wenn ich zunächst den Fall untersuche, dass die Stossnormale nur bei einem von beiden Körpern nicht durch den Schwerpunkt geht, während dies für den anderen immer noch zutreffen soll. Der allgemeinere Fall, dass der Stoss für beide Körper excentrisch ist, lässt sich nachher leicht auf diesen zurückführen.

Dagegen soll der Stoss immer noch grad sein. Wenn wir uns also den einen Körper vor dem Stosse als ruhend vorstellen, so soll der andere relativ zu ihm keine Drehung besitzen und sich in der Richtung der Stossnormalen auf ihn zu bewegen.

Bei dem excentrisch getroffenen Körper wird durch den Stoss eine Drehung hervorgebracht. Wir können uns den Stossdruck $\mathfrak{P}$ durch eine im Schwerpunkte angreifende Kraft $\mathfrak{P}$ und durch ein Kräftepaar ersetzt denken. Die Kraft am Schwerpunkte erzeugt eine Translationsbewegung und das Kräftepaar eine Drehung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe. Es fragt sich zunächst, wie die Drehaxe zur Ebene des Kräftepaars steht. Am nächsten liegt die Annahme, dass die Axe senkrecht zur Ebene des Kräftepaars stehe. Wenn die durch den Schwerpunkt und durch die Stossnormale gelegte Ebene eine Symmetrieebene des excentrisch getroffenen Körpers ist, folgt dies auch schon aus Symmetriegründen. Wir werden aber später sehen (in der Dynamik), dass jene Annahme keineswegs allgemein zutrifft; die Drehaxe kann vielmehr auch schief zur Ebene des Kräftepaars stehen, das die Drehung hervorruft. Wir wollen uns deshalb hier auf den Fall beschränken, dass der excentrisch getroffene Körper eine Symmetrieebene besitzt und dass die Stossnormale in ihr enthalten ist, denn dann besteht kein Zweifel darüber, dass die Drehaxe in der That normal zur Ebene des Kräftepaars ist.

In Abb. 87 ist der mit der Geschwindigkeit v_1 auftreffende Körper Q_1 von kugelförmiger, der excentrisch getroffene Körper Q_2, den wir uns vor dem Stosse in Ruhe denken, von stabförmiger Gestalt angenommen. Am Ende der ersten Stossperiode haben beide Körper an der Berührungsstelle die gleiche Geschwindigkeit u. Beim Körper Q_2 setzt sich u zusammen aus der Translationsgeschwindigkeit u_0 und der Geschwindigkeit der Drehung um die Schwerpunktsaxe, die gleich wp gesetzt werden kann, wenn w die Winkelgeschwindigkeit der Drehung ist. Zwischen u_0 und w besteht aber ein leicht nachzuweisender Zusammenhang. Für die Translations- und für die Winkelbeschleunigung hat man nämlich in jedem Augenblicke

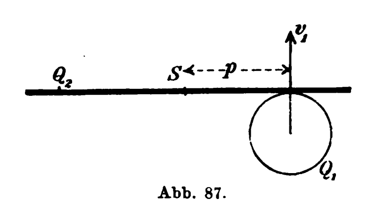


Abb. 87.

$$P = m_2 \frac{du_0}{dt} \quad \text{und} \quad Pp = \Theta \frac{dw}{dt},$$

wenn mit m_2 die Masse und mit Θ das auf die Drehaxe bezogene Trägheitsmoment des Körpers Q_2 bezeichnet wird. Hiernach folgt

$$u_0 = \frac{1}{m_2}\int Pdt; \quad w = \frac{p}{\Theta}\int Pdt, \quad \text{also} \quad w = \frac{pm_2}{\Theta} u_0.$$

Für die Geschwindigkeit u der vom Stosse getroffenen Stelle selbst erhält man demnach

$$u = u_0 + wp = u_0 + \frac{p^2 m_2}{\Theta} u_0 = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{p^2}{\Theta}\right)\int Pdt.$$

Es fehlt nur noch die Ermittelung des Antriebes $\int Pdt$ des Stossdruckes für die erste Stossperiode. Sie folgt aber leicht aus der Bedingung, dass der Körper Q_1 dieselbe Geschwindigkeit u angenommen haben muss. Nach dem Satze vom Antriebe ist

$$\int Pdt = m_1 (v_1 - u),$$

und wenn man dies in die vorige Gleichung einsetzt und nach u auflöst, erhält man

$$u = \frac{m_1 \Theta + m_1 m_2 p^2}{m_2 \Theta + m_1 \Theta + m_1 m_2 p^2} \cdot v_1 .$$

Zur Vereinfachung dieses Ausdruckes setze ich $\Theta = m_2 t^2$, so dass unter t der Trägheitshalbmesser des Körpers Q_2 zu verstehen ist. Ausserdem führe ich an Stelle der Massen m_1 und m_2 die Gewichte Q_1 und Q_2 ein; dadurch geht der vorige Ausdruck über in

$$u = \frac{Q_1 v_1 (p^2 + t^2)}{Q_2 t^2 + Q_1 (p^2 + t^2)} . \tag{123}$$

Wir vergleichen dieses Resultat mit Gl. (115) für den graden centralen Stoss

$$u = \frac{Q_1 v_1}{Q_1 + Q_2} .$$

Zum Zwecke des Vergleiches dividiren wir in Gl. (123) Zähler und Nenner mit $p^2 + t^2$; die Formel lautet dann

$$u = \frac{Q_1 v_1}{Q_1 + Q_2 \dfrac{t^2}{p^2 + t^2}} . \tag{124}$$

Wenn $p = 0$ ist, also für den centralen Stoss, geht Gl. (124) in der That in Gl. (115) über. Im anderen Falle liefert aber Gl. (124) eine Geschwindigkeit u am Ende der ersten Stossperiode, die ebenso gross ist, als für einen centralen Stoss, wenn bei diesem an Stelle des ganzen Gewichtes Q_2 des excentrisch getroffenen Körpers nur ein Gewicht

$$Q_2' = Q_2 \frac{t^2}{p^2 + t^2} \tag{125}$$

eingeführt wird. Die diesem Gewichte entsprechende Masse

$$m_2' = m_2 \frac{t^2}{p^2 + t^2} \tag{126}$$

wird die reducirte Masse des excentrisch getroffenen Körpers genannt. Für den Körper Q_1 ist es ganz gleichgültig, ob er die Masse m_2' centrisch oder die Masse m_2 excentrisch trifft.

Die zweite Stossperiode verläuft beim vollkommen elastischen Stosse wiederum so, dass sich die Geschwindigkeiten nochmals um ebenso viel ändern, als vorher während der ersten Stossperiode. Man kann daher aus den vorher ab-

geleiteten Formeln auch die Endgeschwindigkeiten nach dem Stosse sofort in derselben Weise ermitteln, wie in § 47 für den centralen Stoss. Am einfachsten geschieht dies in der Weise, dass man die reducirte Masse nach Gl. (125) oder (126) in die früheren Formeln (119) einführt.

Bei dieser ganzen Betrachtung wird übrigens vorausgesetzt, dass sich auch der excentrisch getroffene Körper während des Stosses nahezu wie ein starrer Körper bewege. Wenn eine merkliche Biegung des Stabes eintritt, gelten die abgeleiteten Formeln nicht mehr; die reducirte Masse wird dann kleiner als nach Gl. (126), denn das getroffene Stabende kann schon etwas ausweichen, ohne dabei die ganze Masse des Stabes in Mitleidenschaft zu ziehen. Auf die Untersuchung von verwickelten Fällen dieser Art kann aber hier nicht eingegangen werden.

Die lebendige Kraft des excentrisch getroffenen Körpers Q_2 am Ende der ersten Stossperiode ist gleich

$$\frac{1}{2} m_2 u_0^2 + \frac{1}{2} \Theta w^2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} m_2 u_0^2 \left(1 + \frac{p^2 m_2}{\Theta}\right).$$

Ersetzt man hier u_0 durch u mit Hülfe der vorher gefundenen Beziehung

$$u_0 \left(1 + \frac{p^2 m_2}{\Theta}\right) = u$$

und führt die reducirte Masse mit Hülfe von Gl. (126) ein, so geht der Ausdruck für die lebendige Kraft von Q_2 über in

$$\frac{1}{2} m_2' u^2,$$

d. h. auch die lebendige Kraft ist genau so gross, als wenn der excentrisch getroffene Körper durch einen centrisch getroffenen von der reducirten Masse m_2' ersetzt wäre. Auch die Formeln für den Verlust an lebendiger Kraft während der ersten Stossperiode und für den Stossdruck P in § 47 können daher beim excentrischen Stosse sofort benutzt werden, indem man an Stelle von m_2 die reducirte Masse m_2' einführt.

Hiermit ist der bisher besprochene Fall vollständig er-

ledigt und es bleibt nur noch übrig, den Fall zu erörtern, dass der Stoss für beide Körper excentrisch ist. Die einzige Aenderung, die dadurch herbeigeführt wird, besteht darin, dass nun für jeden von beiden Körpern an Stelle der ganzen Masse die reducirte Masse nach Gl. (126) in die Formeln für den centralen Stoss einzusetzen ist. Man erhält dadurch die Geschwindigkeit u der Stossstelle am Ende der ersten Stossperiode und findet daraus die Translations- und die Rotationsgeschwindigkeit jedes Körpers mit Hülfe der vorher festgestellten Beziehungen. Ich sehe davon ab, dies weiter auszuführen, weil man nur selten in die Lage kommen wird, einen practischen Gebrauch von diesen Rechnungen zu machen.

§ 50. **Stoss gegen einen Körper mit fester Drehaxe.**

Der Körper Q_2 möge jetzt in einem festen Gestelle drehbar gelagert sein. Er sei vor dem Stosse in Ruhe und der Körper Q_1 möge mit der Geschwindigkeit v_1 einen graden Stoss auf ihn ausüben. Für den Körper Q_1 soll der Stoss central sein; wäre er es nicht, so könnte übrigens durch Einführung der reducirten Masse der Fall leicht nach Anleitung des vorhergehenden Paragraphen auf den hier zu untersuchenden zurückgeführt werden. Beim Körper Q_2 ist es für die jetzt durchzuführende Betrachtung gleichgültig, ob der Stoss centrisch oder excentrisch erfolgt; wir wollen daher den allgemeineren Fall von vornherein zu Grunde legen.

Wenn die Stossnormale die feste Drehaxe von Q_2 schneidet, kann keine Bewegung von Q_2 eintreten; für Q_1 erfolgt dann der Stoss so, als wenn Q_1 auf eine mit der Erde fest verbundene Wand getroffen wäre. Auch dann, wenn die Stossnormale parallel zur Drehaxe gerichtet ist, bleibt dies gültig. Ueberhaupt kommt für den Körper Q_2 von dem Stossdrucke nur jene Componente in Betracht, die rechtwinklig zu der durch die Drehaxe und die Stossstelle gelegten Ebene steht. Ich will mich daher mit der Untersuchung des Falles begnügen, dass die Stossnormale in die eben bezeichnete Richtung fällt.

Die Winkelgeschwindigkeit von Q_2 in irgend einem Augenblicke der ersten Stossperiode sei mit w bezeichnet und die Entfernung eines Massenpunktes m von der Drehaxe mit x. Dann ist die Geschwindigkeit von m gleich wx und die Tangentialbeschleunigung gleich $mx\frac{dw}{dt}\cdot$ An m muss dann im gegebenen Augenblicke eine resultirende Kraft wirken, die sich in eine Tangentialcomponente $mx\frac{dw}{dt}$ und in eine durch die Drehaxe gehende Normalcomponente zerlegen lässt. Die Uebertragung dieser resultirenden Kräfte auf die einzelnen Massenpunkte wird durch die inneren Kräfte im Körper Q_2 vermittelt. Wenn wir eine Momentengleichung für die feste Drehaxe als Momentenaxe anschreiben, heben sich die inneren Kräfte für den ganzen Körper gegen einander weg. Auch die vorher erwähnte Normalcomponente der an jedem materiellen Punkte angreifenden resultirenden Kraft fällt aus der Momentengleichung fort, weil sie die Momentenaxe schneidet. Das statische Moment der Tangentialcomponente ist gleich $mx\frac{dw}{dt}\cdot x$ und die Momentengleichung lautet daher

$$\sum mx^2\frac{dw}{dt} = Pp.$$

Hier ist mit P wieder der augenblickliche Werth des Stossdruckes bezeichnet und p ist dessen Hebelarm. Da $\frac{dw}{dt}$ für den ganzen Körper constant ist, lässt sich dieser Factor vor das Summenzeichen setzen. Die dann noch stehen bleibende Summe Σmx^2 bildet das Trägheitsmoment Θ des Körpers Q_2 für die Drehaxe. Die Gleichung vereinfacht sich daher zu

$$\frac{dw}{dt}\Theta = Pp.$$

Für den Antrieb während der ersten Stossperiode erhält man daraus

$$\int P dt = \frac{\Theta}{p}w',$$

wenn mit w' die Winkelgeschwindigkeit der Drehung am Ende der ersten Stossperiode bezeichnet wird. — Andererseits lässt

sich aber auch w' in der früher mit u bezeichneten Geschwindigkeit der Stossstelle am Ende der ersten Stossperiode ausdrücken. Die Stossnormale möge senkrecht zu dem nach der Stossstelle von der Drehaxe aus gezogenen Radiusvector stehen. Dann ist der Hebelarm p des Stossdruckes gleich der Entfernung der Stossstelle von der Drehaxe und man hat

$$u = w'p.$$

Setzt man den sich hieraus ergebenden Werth von u in die vorige Gleichung ein, so erhält man

$$\int P dt = \frac{\Theta}{p^2} u.$$

Zugleich ist aber auch für den Körper Q_1

$$\int P dt = \frac{Q_1}{g}(v_1 - u)$$

und der Vergleich beider Ausdrücke liefert

$$u = \frac{Q_1 v_1}{g\frac{\Theta}{p^2} + Q_1}. \tag{127}$$

Auch in diesem Falle kann man sich den drehbar befestigten Körper Q_2 durch einen centrisch getroffenen freien Körper ersetzt denken, dessen reducirte Masse M_{red}, wie aus einem Vergleiche mit Gl. (115) hervorgeht,

$$M_{red} = \frac{\Theta}{p^2} = \frac{Q_2}{g}\left(\frac{t}{p}\right)^2 \tag{128}$$

zu setzen ist. Unter t ist in der letzten Form des Ausdrucks der Trägheitshalbmesser des Körpers Q_2 für die feste Drehaxe zu verstehen. Wenn $p = t$ ist, erfolgt der Stoss für den Körper Q_1 so, als wenn Q_2 frei und central getroffen wäre. Auch die Stossstelle von Q_2 nimmt dann genau dieselbe Geschwindigkeit an, als wenn dies der Fall wäre.

In der zweiten Stossperiode wiederholt sich die vorige Geschwindigkeitsänderung, wenn der Stoss vollkommen elastisch ist; andernfalls ist sie entsprechend kleiner. Ueberhaupt ist durch Gl. (128) die Aufgabe auf den Fall des graden centralen Stosses zurückgeführt.

Nur dann, wenn man zugleich nach dem Stossdrucke fragt, der sich auf die feste Axe überträgt, ist noch eine weitere Untersuchung erforderlich. Abgesehen von einem besonderen Falle, der im nächsten Paragraphen eingehender besprochen wird, hat aber diese Untersuchung gewöhnlich nicht viel Interesse, und ich begnüge mich daher mit einer Andeutung des Weges, der dabei einzuschlagen ist. Man denke sich an jedem materiellen Punkte des Körpers Q_2 eine Kraft willkürlich angebracht, die der an ihm angreifenden resultirenden Kraft gleich und entgegengesetzt gerichtet ist. Alle diese Kräfte bilden mit dem Stossdrucke P und mit dem von der festen Drehaxe auf Q_2 übertragenen Auflagerdrucke ein Gleichgewichtssystem. Für die Tangentialcomponenten jener Kräfte ist ein Ausdruck vorher schon aufgestellt worden; auch für die Normalcomponente, also für die Centrifugalkraft am materiellen Punkte m lässt sich der Ausdruck sofort bilden und aus der Bedingung, dass die geometrische Summe aller an Q_2 jetzt angreifenden Kräfte gleich Null sein muss, folgt der Druck an der Drehaxe, zunächst wenigstens ausgedrückt im Stossdrucke P. So wenig wie P lässt sich auch der Druck auf die Drehaxe ohne eine nähere Angabe über die Formänderung ermitteln, die mit dem Stosse verbunden ist. Wenn aber der Zusammenhang zwischen der erfolgenden Abplattung und dem Stossdrucke P gegeben ist, folgt daraus in derselben Art, wie in § 47, zunächst P und hiermit auch der Druck auf die Axe.

§ 51. Der Mittelpunkt des Stosses.

Ein freier und vorher ruhender Körper Q_2, der excentrisch getroffen wird, nimmt eine Bewegung an, die unmittelbar nach Ablauf des ganzen Stosses im allgemeinsten Falle als eine Schraubenbewegung angesehen werden kann. Bei den gewöhnlich vorkommenden einfacheren Fällen verschwindet aber die Translationscomponente der Schraubenbewegung, und man hat es nur mit einer Rotation um irgend eine Momentanaxe zu

thun, die zu der durch den Schwerpunkt von Q_2 und die Stossnormale gelegten Ebene senkrecht steht. Die Bewegung von Q_2 ist dann eine ebene Bewegung und es genügt, ihre Projection auf eine Ebene zu verfolgen, in der die Momentanaxe als Punkt erscheint. Diesen Punkt, also den Pol der ebenen Bewegung unmittelbar nach dem Stosse, pflegt man als den Stossmittelpunkt zu bezeichnen.

Da der Stossmittelpunkt und die durch ihn gelegte Momentanaxe während des Stosses keine Geschwindigkeit erlangten, kann man sich den ursprünglich freien Körper auch längs dieser Axe drehbar befestigt denken, ohne etwas zu ändern. Man erkennt daraus, dass der Stossmittelpunkt zugleich jener Punkt ist, durch den eine feste Drehaxe gelegt werden kann, die während des Stosses gar keinen Druck aufzunehmen hat. Wir haben es also hier zugleich mit dem besonderen Falle des Stosses gegen einen Körper mit fester Drehaxe zu thun, bei dem kein Druck auf die Drehaxe ausgeübt wird.

Für den in § 49 behandelten Fall, dass der excentrisch getroffene Körper Q_2 stabförmig ist, folgt die Lage des Stossmittelpunktes aus einem Vergleiche der Formeln (126) und (128) für die reducirten Massen. Beide Werthe müssen hier einander gleich sein. Dabei ist jedoch zu beachten, dass sich in § 49 der Hebelarm p, das Trägheitsmoment Θ und der Trägheitshalbmesser t auf die Schwerpunktsaxe bezogen, während in § 50 dieselben Bezeichnungen in Bezug auf die feste Drehaxe genommen wurden. Zur Umrechnung dient die Bemerkung, dass in Bezug auf den Schwerpunkt die lebendige Kraft nach Gl. (79) gleich

$$\frac{1}{2} m v_0{}^2 + \frac{1}{2} \Theta u^2$$

und in Bezug auf die Momentanaxe gleich

$$\frac{1}{2} \Theta' u^2$$

gesetzt werden kann, wenn jetzt Θ' das Trägheitsmoment für die Momentanaxe ist. Der Abstand der Momentanaxe vom

Schwerpunkte sei z; dann ist $v_0 = uz$ und die Gleichsetzung beider Ausdrücke für die lebendige Kraft liefert

$$\Theta' = \Theta + mz^2, \quad \text{also auch } t'^2 = t^2 + z^2.$$

Setzen wir diesen Werth in Gl. (128) ein, ferner auch an Stelle von p den Werth $p' = p + z$, und beachten wir, dass Gl. (128) alsdann mit Gl. (126) übereinstimmen muss, so erhalten wir

$$\frac{t^2 + z^2}{(p+z)^2} = \frac{t^2}{p^2 + t^2}$$

und die Auflösung dieser Gleichung liefert für den gesuchten Abstand des Stossmittelpunktes vom Schwerpunkte

$$z = \frac{t^2}{p}. \qquad (129)$$

Man macht von dieser Formel zuweilen Gebrauch, um für einen Maschinentheil, der Stösse erfährt, die günstigste Lage der Drehaxe aufzusuchen, nämlich jene, bei der die Drehaxe selbst nicht beansprucht wird. Ist die Lage der Drehaxe schon durch andere Bedingungen gegeben, so kann man oft durch eine passende Vertheilung der Massen, also durch Anbringen von Uebergewichten o. dgl. dafür sorgen, dass Gl. (129) erfüllt, der Stoss für die Axe also unschädlich gemacht wird. Auch bei einem Hammer, der von der Hand geführt wird, bei einem Beile o. dgl. ist eine solche Massenvertheilung wünschenswerth, dass die Angriffsstelle der Hand ungefähr mit dem Mittelpunkte des bei der Arbeit mit dem Werkzeuge auftretenden Stosses zusammenfällt, um einen Schlag gegen die Hand, die während des Stosses als Drehaxe dient, zu vermeiden. Bei den Werkzeugen dieser Art ist die genannte Bedingung gewöhnlich ziemlich gut erfüllt. Sobald man aber mit einem Beile ein Stück Holz angeschlagen hat, das nun am Beile haften bleibt, worauf man einen neuen Schlag ausführt, bei dem sich das Beil und das Holzstück gemeinsam bewegen, kann man bei ungeschickter Wahl der Aufschlagstelle einen sehr heftigen Stoss gegen die Hand empfinden.

In der Dynamik, also im vierten Bande dieser Vorlesungen, wird übrigens auf einige Fälle des Stosses, die an dieser Stelle noch zu schwierig sein würden, zurückgekommen werden.

§ 52. Der schiefe Stoss.

Schief wird der Stoss genannt, wenn der eine Körper vor dem Stosse relativ zum andern entweder eine Drehung ausführt oder wenn die Bewegungsrichtung nicht mit der Richtung der Stossnormalen zusammenfällt. Wir wollen zunächst annehmen, dass die Relativbewegung nur in einer Translation bestehe. Diese zerlege man in zwei Componenten, von denen die eine in die Richtung der Stossnormalen fällt, während die andere zu ihr senkrecht steht. In Abb. 88, in der beide Körper als Kugeln angenommen sind, ist diese Zerlegung angedeutet; Q_2 sei der Körper, den wir vor dem Stosse als ruhend ansehen, Q_1 der mit der Relativbewegung auf ihn stossende.

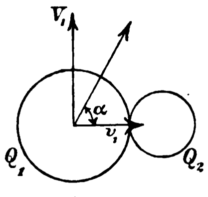


Abb. 88.

Von beiden Bewegungscomponenten bewirkt nur die in die Richtung der Stossnormalen fallende eine Annäherung beider Körper. Wenn die Oberflächen absolut glatt wären, so dass keine Reibung zwischen ihnen übertragen werden könnte, hätte die Tangentialcomponente der Relativgeschwindigkeit überhaupt keinen Einfluss auf den Verlauf des Stosses. Für den Körper Q_2 wäre es genau so, als wenn der Stoss grad erfolgte und von Q_1 würde sich die Normalcomponente ebenfalls in derselben Weise wie bei einem graden Stosse ändern, während die Tangentialcomponente der Geschwindigkeit unverändert erhalten bliebe.

Durch die gleitende Reibung zwischen den Oberflächen tritt aber eine Abweichung von diesem Verhalten ein. Die Oberflächen beider Körper werden während des Stosses stark aufeinander gedrückt und die Stossstelle von Q_1 wird dadurch verhindert, über die Berührungsfläche von Q_2 zu gleiten. Hier-

durch wird einerseits die Tangentialgeschwindigkeit der Berührungsfläche von Q_1 verringert, andererseits wird der Berührungsfläche von Q_2 eine Tangentialgeschwindigkeit in derselben Richtung ertheilt. Wenn die Reibung ausreichte, um jedes Gleiten zu verhindern, müssten beide Körper an der Berührungsstelle dieselbe Tangentialgeschwindigkeit annehmen. Die Reibung, die diesen Ausgleich bewirkt, ist für beide Körper excentrisch. In Folge dessen werden beide Körper in Drehung versetzt und zwar drehen sich beide im selben Sinne, im Falle der Abb. 88 im Sinne der Uhrzeigerbewegung. Wenn die Stossnormale nicht durch die Schwerpunkte beider Körper geht, kommt dazu noch dieselbe Drehung wie beim graden excentrischen Stosse. Von diesem verwickelteren Falle wollen wir aber der Einfachheit wegen hier absehen.

Unmittelbar nach Beginn des Stosses ist der Stossdruck P noch verhältnissmässig klein, und mit ihm daher auch die Reibung. Bis dahin kann also noch keine merkliche Drehung beider Körper hervorgerufen worden sein. Zu Anfang des Stosses tritt also jedenfalls ein Gleiten der Körper ein. Um zu einer angenäherten Lösung der Aufgabe auf möglichst einfachem Wege zu gelangen, sieht man daher von der Wirkung der Reibung auch während des ganzen Stosses häufig ganz ab, behandelt also den Fall so, wie es vorher für den Fall absolut glatter Oberflächen angedeutet wurde. Die Lösung wird dann durch Anwendung der Formeln für den graden Stoss in Bezug auf die Normalcomponenten der Geschwindigkeit sofort gefunden, da die Tangentialcomponente überhaupt keine Aenderung erfährt.

Wenn man sich damit nicht begnügen will, kann man die folgende Rechnung anstellen. Mit v_1 sei, wie früher, die Normalcomponente der Geschwindigkeit von Q_1 vor dem Stosse, mit V_1 die Tangentialcomponente bezeichnet. Im Uebrigen werden die Bezeichnungen von § 47 beibehalten. Man hat zunächst wieder

$$\int P dt = \frac{Q_1}{g}(v_1 - u) = \frac{Q_2}{g} u$$

d hiermit, wie in Gl. (115),

$$u = \frac{Q_1 v_1}{Q_1 + Q_2}.$$

Nun entspricht jedem Werthe von P eine Reibung vom trage Pf, wenn f der Reibungscoefficient ist. Unter der raussetzung, dass die Reibung während der ganzen ersten ssperiode in ihrem Höchstbetrage auftritt, hat man

$$\Theta_1 \frac{dw_1}{dt} = Pfp_1 \quad \text{und hieraus} \quad \Theta_1 w_1 = fp_1 \int Pdt.$$

Darin bedeutet w_1 die Winkelgeschwindigkeit, die Q_1 am ide der ersten Stossperiode angenommen hat, Θ_1 das Träg itsmoment von Q_1 für die Schwerpunktsaxe, p_1 den Hebel n der Reibung, also für den Fall einer kugelförmigen Ge lt den Halbmesser von Q_1. Drückt man den Antrieb von in u aus, so geht die Gleichung über in

$$w_1 = fp_1 \frac{Q_2 u}{g \Theta_1}. \tag{130}$$

enso wird für den Körper Q_2 gefunden

$$w_2 = fp_2 \frac{Q_2 u}{g \Theta_2}. \tag{131}$$

Ausser der Drehung um den Schwerpunkt bewirkt aber Reibung auch eine Aenderung der Tangentialgeschwindig it. Diese sei am Ende der ersten Stossperiode für beide irper mit U_1 bezw. U_2 bezeichnet. Man hat

$$\int Pfdt = \frac{Q_1}{g}(V_1 - U_1) = \frac{Q_2}{g} U_2$$

d hieraus, wenn man wiederum den Antrieb $\int Pdt$ in u sdrückt,

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= V_1 - f\frac{Q_2}{Q_1}u \\ U_2 &= fu \end{aligned}\right\}. \tag{132}$$

Man kann sich jetzt Rechenschaft darüber geben, ob die ibung in der That, wie es vorausgesetzt war, bis zum Ende r ersten Stossperiode ihre volle Grösse behält. Die Tan ntialcomponente der Geschwindigkeit von Q_1 an der Be hrungsstelle ist nämlich

$$U_1 - w_1 p_1$$

oder nach den vorausgehenden Formeln

$$V_1 - fu \frac{Q_2}{Q_1} \cdot \frac{t_1^2 + p_1^2}{t_1^2},$$

wobei an Stelle des Trägheitsmoments Θ_1 der Trägheitsradius t_1 eingeführt ist. Ebenso erhält man für die Tangentialcomponente der Geschwindigkeit von Q_2 an der Berührungsstelle

$$U_2 + w_2 p_2,$$

also nach Einsetzen der Werthe von U_2 und w_2

$$fu \frac{t_2^2 + p_2^2}{t_2^2}.$$

Die Voraussetzung über die Grösse der Reibung ist jedenfalls dann erfüllt, wenn auch am Ende der ersten Stossperiode noch ein Gleiten der Oberflächen stattfindet oder auch, wenn es grade in diesem Augenblicke erst aufhört. Wir brauchen also nur die Ausdrücke für die beiden Tangentialcomponenten miteinander zu vergleichen, also zu untersuchen, ob die für Q_1 gültige Tangentialcomponente noch grösser oder höchstens gleich der für Q_2 berechneten ist. Es hängt von der Grösse des Reibungscoefficienten f und von dem Winkel, den die Geschwindigkeit von Q_1 vor dem Stosse mit der Stossnormalen bildet, ab, ob dies zutrifft. Bezeichnet man diesen Winkel mit α, setzt also $V_1 = v_1 \operatorname{tg} \alpha$, so bildet die Gleichung

$$v_1 \operatorname{tg} \alpha - f \frac{Q_2 v_1}{Q_1 + Q_2} \cdot \frac{t_1^2 + p_1^2}{t_1^2} = f \frac{Q_1 v_1}{Q_1 + Q_2} \cdot \frac{t_2^2 + p_2^2}{t_2^2}$$

die Bedingung dafür, dass beide Oberflächen am Ende der ersten Stossperiode grade aufgehört haben, gegeneinander zu gleiten. Wenn die linke Seite der Gleichung grösser ist, als die rechte, wenn also der Stoss noch schiefer erfolgt, als es der Gleichung entspricht, bleiben die vorausgehenden Formeln ebenfalls richtig. Die Auflösung der Gleichung liefert

$$\operatorname{tg} \alpha = f \cdot \frac{1}{Q_1 + Q_2} \left(Q_2 \frac{t_1^2 + p_1^2}{t_1^2} + Q_1 \frac{t_2^2 + p_2^2}{t_2^2} \right). \quad (133)$$

Auf den Absolutwerth der Geschwindigkeit kommt es demnach nicht an, sondern nur auf ihre Richtung. Wenn der

Stoss schief genug erfolgt, wenn also tg α mindestens den eben berechneten Werth hat, kann man die vorausgehenden Formeln anwenden und sie liefern dann alle erforderlichen Angaben zur Beschreibung der Bewegung beider Körper am Ende der ersten Stossperiode. In der zweiten Stossperiode treten dann noch weitere Geschwindigkeitsänderungen im selben Sinne hinzu, die beim vollkommen elastischen Stosse ebenso gross werden können, als die der ersten Stossperiode entsprechenden. Dabei muss aber beachtet werden, ob auch noch während der Dauer der zweiten Stossperiode die Reibung in ihrem Höchstbetrage auftritt, d. h. ob sich das Gleiten der Oberflächen übereinander bis zum Ende des ganzen Stosses fortsetzt.

Wenn tg α den vorher berechneten Werth nicht erreicht, hört das Gleiten der Oberflächen schon während der ersten Stossperiode auf. Die Rechnung muss für diesen Fall nach dem Muster der vorausgehenden von Neuem angestellt werden. Man bestimmt zunächst den Augenblick, in dem die Tangentialgeschwindigkeiten beider Körper an der Berührungsstelle grade gleich gross geworden sind. Von da ab hört die gleitende Reibung auf und es findet nur noch eine Aenderung der Normalcomponenten der Geschwindigkeiten statt.

Auch diese Rechnung soll noch in Kürze durchgeführt werden. In dem Augenblicke der ersten Stossperiode, um den es sich jetzt handelt, seien die Normalcomponenten der Geschwindigkeiten mit u_1 und u_2 bezeichnet, wobei jetzt zu beachten ist, dass u_2 noch nicht gleich u_1 geworden ist. Der bis zu diesem Augenblicke gerechnete Antrieb des Stossdruckes sei gleichfalls mit $\int P dt$ bezeichnet; es ist dies aber ein kleinerer Werth als der vorher darunter verstandene. Man hat

$$\int P d t = \frac{Q_1}{g}(v_1 - u_1) = \frac{Q_2}{g} u_2 .$$

Für $w_1 w_2 U_1 U_2$ können wir die vorausgegangenen Rechnungen benutzen, wenn nur an Stelle von u jetzt überall u_2 geschrieben wird. Die Bedingung für die Gleichheit der Tan-

gentialcomponenten der Geschwindigkeiten an der Berührungsstelle lautet dann

$$V_1 - fu_2 \frac{Q_2}{Q_1} \cdot \frac{t_1^2 + p_1^2}{t_1^2} = fu_2 \frac{t_2^2 + p_2^2}{t_2^2}.$$

In dieser Gleichung ist jetzt u_2 die einzige Unbekannte und diese kann durch Auflösen daraus berechnet werden. Setzt man den gefundenen Werth in die früheren Formeln ein, so erhält man $w_1 w_2 U_1 U_2$ zunächst in dem betreffenden Augenblicke. Da sich diese Grössen im weiteren Verlaufe des Stosses nicht mehr ändern, hat man aber damit zugleich auch ihre endgültigen Werthe. Für die Normalcomponenten der Geschwindigkeit endlich bleiben, wie schon im vorhergehenden Falle, die Formeln des graden Stosses ohne jede Aenderung anwendbar.

Schliesslich soll noch der Fall behandelt werden, dass sich der Körper Q_1 zwar in der Richtung der Stossnormalen auf Q_2 zu bewegte, wie beim graden centralen Stosse, dass er aber dabei vor dem Stosse eine Rotation um eine senkrecht zur Stossnormalen stehende Axe hatte. Die Körper mögen kugelförmig und von gleicher Grösse und gleicher Masse vorausgesetzt werden, etwa wie zwei Billardbälle, die in der angegebenen Weise aufeinanderstossen. Unmittelbar nach Beginn des Stosses findet dann jedenfalls wieder ein Gleiten der Oberflächen aufeinander statt und wenn die Winkelgeschwindigkeit des stossenden Körpers gross genug war, dauert das Gleiten während des ganzen Stosses fort. Wir wollen dies jetzt voraussetzen; im anderen Falle ist so wie vorher zu verfahren.

Die Winkelgeschwindigkeit von Q_1 vor dem Stosse sei mit W_1 bezeichnet; im Uebrigen behalten wir die früheren Bezeichnungen bei. Man hat der Reihe nach

$$\int P dt = \frac{Q_1}{g}(v_1 - u) = \frac{Q_2}{g} u$$

und hieraus

$$u = \frac{Q_1 v_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{1}{2} v_1,$$

$$\Theta_1 \frac{dw_1}{dt} = Pfp_1 \quad \text{und hieraus} \quad \Theta(W_1 - w_1) = fp_1 \int P dt$$

$$\text{oder auch} \quad w_1 = W_1 - fp_1 \frac{Q_2 u}{g \Theta_1}.$$

Ferner wie früher

$$w_2 = fp_2 \frac{Q_2 u}{g \Theta_2}.$$

Dann für die Tangentialcomponenten der Geschwindigkeiten der Schwerpunkte, die durch die Reibung in entgegengesetzten Richtungen hervorgebracht werden,

$$U_1 = U_2 = fu.$$

Das Trägheitsmoment einer Kugel vom Gewichte Q ist $\Theta = \frac{Q}{g} \cdot \frac{2}{5} r^2$. Für die beiden einander gleichen Kugeln vereinfachen sich daher die gefundenen Werthe noch zu

$$w_1 = W_1 - \frac{5}{4} f \frac{v_1}{r}; \quad w_2 = \frac{5}{4} f \frac{v_1}{r}; \quad U_1 = U_2 = \frac{1}{2} f v_1.$$

Damit ist der Zustand am Ende der ersten Stossperiode gegeben. Setzt man einen vollkommen elastischen Stoss voraus und bezeichnet die Werthe am Ende des ganzen Stosses durch Beifügung von Strichen, so wird

$$w_1' = W_1 - \frac{5}{2} f \frac{v_1}{r}; \quad w_2' = \frac{5}{2} f \frac{v_1}{r}; \quad U_1' = U_2' = f v_1.$$

Die Normalcomponente der Geschwindigkeit von Q_1 ist zu Null, die von Q_2 gleich v_1 geworden; d. h. beide Körper haben ihre Normalgeschwindigkeiten gegeneinander ausgetauscht.

Wir können uns jetzt auch noch davon überzeugen, wie gross die ursprüngliche Winkelgeschwindigkeit W_1 von Q_1 mindestens sein muss, wenn bis zum Ende des Stosses ein Gleiten der Oberflächen anhalten soll, wie es bei der Ableitung dieser Formeln vorausgesetzt wurde. Es muss nämlich

$$w_1' r - U_1' \geqq w_2' r + U_2'$$

sein, also wenn man die vorigen Werthe einsetzt,

$$rW_1 - \frac{5}{2} f v_1 - f v_1 \geqq \frac{5}{2} f v_1 + f v_1$$

$$W_1 \geqq 7 f \frac{v_1}{r}$$

als Bedingung für die Gültigkeit der vorausgehenden Formeln.

§ 53. Der Stoss gegen eine feste Wand.

Eine feste Wand bildet einen Bestandtheil der ganzen festen Erde; der Stoss gegen eine feste Wand ist daher als ein Stoss gegen die ganze Erde aufzufassen. Da die Masse der Erde ungemein gross gegen die Masse eines Körpers ist, der auf sie stösst, kann man für diesen Fall in den Formeln der früheren Paragraphen $Q_2 = \infty$ setzen. Dabei macht es auch nichts aus, wenn der Stoss für die Erde excentrisch ist, denn auch die reducirte Masse der Erde ist in allen Fällen, die überhaupt in Betracht kommen können, als unendlich gross gegenüber der Masse von Q_1 anzusehen. Beim graden Stosse wird die Geschwindigkeit u am Ende der ersten Stossperiode zu Null. Wenn der Stoss vollkommen elastisch erfolgt, wiederholt sich derselbe Geschwindigkeitswechsel während der zweiten Stossperiode nochmals und der Körper prallt mit derselben Geschwindigkeit von der festen Wand ab, mit der er auf sie aufgetroffen war.

Freilich ist diese Betrachtung, worauf schon früher (§ 44, S. 282) hingewiesen wurde, nicht ganz genau und oft sogar ganz unzulänglich. Bei den Betrachtungen über den Stoss wird nämlich keine Rücksicht darauf genommen, dass in einem gegebenen Augenblicke während des Stosses die Geschwindigkeiten verschiedener Punkte desselben Körpers verschieden gross sein können. Unter gewöhnlichen Umständen ist diese Vernachlässigung zwar unbedenklich, weil dann in der That erhebliche Geschwindigkeitsunterschiede nicht zu erwarten sind. Bei einem Körper von sehr grosser Ausdehnung und namentlich bei der ganzen Erde ist dies aber anders. Hier sind die Geschwindigkeiten in der Nachbarschaft der Stoss-

stelle erheblich verschieden von jenen in grösserer Entfernung. Für eine genauere Behandlung wäre es daher erforderlich, auf die Art der Formänderung an allen Stellen der Erde, namentlich an jenen in der näheren und in der weiteren Nachbarschaft der Stossstelle näher einzugehen und die wellenartige Fortpflanzung des Stosses durch diese Gegenden, die mit der Geschwindigkeit des Schalles erfolgt, ausführlich zu untersuchen. Unter besonderen Annahmen ist diese Aufgabe, freilich unter Aufgebot der schwierigsten mathematischen Hülfsmittel, auch schon gelöst worden; trotz des grossen Aufwandes an scharfsinniger Arbeit ist aber damit doch nicht viel gewonnen worden, da die Voraussetzungen, von denen jene Betrachtungen ausgehen, der Wirklichkeit in der Regel zu wenig entsprechen.

Wenn die feste Wand im Vergleiche zu dem auf sie stossenden Körper nahezu als starr angesehen werden kann, wenn sich also die Formänderung während des Stosses fast ganz auf den Körper beschränkt, der auf die feste Wand trifft, fallen diese Bedenken aber fort. Ein Gummiball, der gegen eine Steinwand geworfen wird, verhält sich daher in der That nahezu so, wie es vorher angegeben war. Er wird zwar auch beim graden Stosse nicht mit ganz derselben Geschwindigkeit von der festen Wand zurückgeworfen, mit der er auftraf; oft genug genügt es aber, den Unterschied zu vernachlässigen.

Beim schiefen Stosse gegen eine feste Wand findet zunächst ebenfalls ein Gleiten der Oberflächen statt. Wenn die Flächen absolut glatt wären, so dass keine gleitende Reibung zwischen ihnen auftreten könnte, würde die Tangentialcomponente der Geschwindigkeit V_1 von Q_1 überhaupt nicht geändert. Die Normalcomponente v_1 würde sich dagegen durch den Stoss in die entgegengesetzte umkehren. In Folge davon würde Q_1 von der festen Wand mit derselben Geschwindigkeit, aber in einer Richtung zurückgeworfen, die mit der Stossnormalen einen nach der entgegengesetzten Seite zählenden Winkel von gleicher Grösse wie vorher bildet. In Abb. 89 ist dies an-

gedeutet; die Zurückwerfung erfolgt so, wie die eines Lichtstrahls an einer spiegelnden Fläche.

Gewöhnlich begnügt man sich mit dieser näherungsweisen Beschreibung des Vorgangs. Dass sie nicht genau sein kann, geht schon aus den Untersuchungen über den schiefen Stoss im vorigen Paragraphen hervor. Wegen der Reibung tritt eine Verzögerung der Tangentialcomponente der Geschwindigkeit von Q_1 ein und zugleich wird Q_1 in Drehung versetzt. Auch hierfür kann man die Formeln des vorigen Paragraphen ohne Weiteres benutzen, wenn man darin $Q_2 = \infty$ setzt. So erhält man aus Gl. (130), wenn man darin zuvor den Werth von u eingesetzt hat,

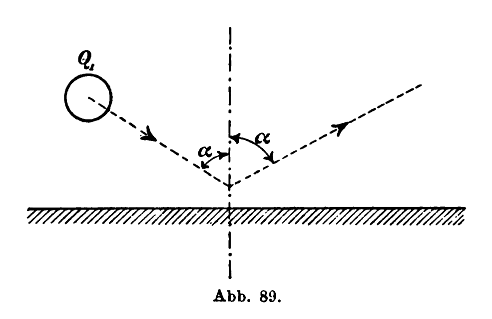


Abb. 89.

$$w_1 = f p_1 \frac{Q_1 v_1}{g \Theta_1}.$$

Aus Gl. (131) folgt $w_2 = 0$ und aus den Gleichungen (132)

$$U_1 = V_1 - f v_1; \quad U_2 = 0.$$

Die Bedingung für die Gültigkeit dieser Gleichungen, also dafür, dass das Gleiten mindestens bis zum Ende der ersten Stossperiode andauert, folgt aus Gl. (133) dahin, dass der Stoss so schief sein muss, dass tg α mindestens

$$\operatorname{tg} \alpha = f \frac{t_1^2 + p_1^2}{t_1^2}$$

ist. Im anderen Falle kann die sich hierauf beziehende Untersuchung des vorigen Paragraphen ebenfalls sofort benutzt werden.

Die Reibung verzögert die Tangentialcomponente der Geschwindigkeit von Q_1 und dieser Umstand hat zur Folge, dass der Winkel, den die Abspringrichtung mit der Normalen bildet, etwas kleiner wird, als der Einfallwinkel. Andererseits

ist aber der Stoss auch nicht vollkommen elastisch. Daher wird auch die Normalcomponente der Geschwindigkeit beim Abspringen kleiner, als beim Auftreffen. Dieser Umstand bewirkt wieder eine Vergrösserung des Abspringwinkels. Wenn sich beide Geschwindigkeitscomponenten zufällig grade in demselben Verhältnisse vermindern, wird daher der Abspringwinkel immer noch ebenso gross als der Einfallwinkel sein. Jedenfalls hat sich aber die Geschwindigkeit des Abspringens gegenüber der des Auftreffens vermindert. Der damit zusammenhängende Verlust an lebendiger Kraft wird zum Theile durch die lebendige Kraft der Drehung aufgewogen, die Q_1 annimmt. Ein anderer Theil kommt auf die Rechnung der Reibungsarbeit, die beim Gleiten der Oberflächen während des Stosses geleistet wird und der Rest ist auf Rechnung der bei dem unvollkommen elastischen Stosse nicht wieder ganz zurückgewonnenen Formänderungsarbeit zu setzen.

Auch für den Fall, dass der Körper Q_1 schon vor dem Auftreffen auf die feste Wand eine Drehbewegung besass, lässt sich die Untersuchung ähnlich wie früher durchführen.

Achter Abschnitt.

Die Mechanik flüssiger Körper.

§ 54. Die Eigenschaften der vollkommenen Flüssigkeit.

Flüssig wird ein Körper genannt, der einer Gestaltänderung, die nicht zugleich mit einer Aenderung des von ihm eingenommenen Rauminhaltes verbunden ist, keinen Widerstand entgegen setzt. Die meisten Anwendungen der Mechanik flüssiger Körper beziehen sich auf das Wasser und daher rührt auch die Bezeichnung dieses Theiles der Mechanik als Hydrostatik und Hydrodynamik. So wie man aber einen festen Körper zunächst unter dem Bilde eines starren Körpers betrachtet und die Untersuchung der elastischen oder sonst von dem starren Verhalten abweichenden Eigenschaften einer späteren Betrachtung vorbehält, wird auch in der Mechanik der flüssigen Körper nicht das Wasser mit allen physikalischen Eigenschaften, die ihm zukommen, von vornherein der Betrachtung zu Grunde gelegt, sondern man schiebt ihm auch hier ein einfacheres Bild unter, das die wesentlichsten Eigenschaften des Wassers wiedergibt und die minder wesentlichen übergeht. In vielen Fällen genügt dieses vereinfachte Bild; in anderen kommt man freilich nicht ohne die Beachtung der abweichenden Eigenschaften aus.

Auch das Wasser ist elastisch; es lässt sich in einem widerstandsfähigen Gefässe unter hohem Drucke auf ein kleineres Volumen zusammendrücken. Diese Volumenänderung ist aber unter den practisch erreichbaren Druckkräften so

gering, dass man nur selten darauf Rücksicht zu nehmen braucht. Deshalb legen wir der idealen Flüssigkeit, die wir an Stelle des Wassers setzen wollen, die Eigenschaft der Unzusammendrückbarkeit bei. Ebenso sehen wir in der Regel von der Volumenänderung ab, die durch eine Temperaturänderung des Wassers hervorgebracht werden kann. Eine gegebene Menge der idealen unzusammendrückbaren Flüssigkeit soll daher stets den gleichen Raum einnehmen.

Auch die Gase und Dämpfe gehören zu den flüssigen Körpern. Sie sind aber elastisch flüssig in dem Sinne, dass man schon von Anfang an auf den Zusammenhang zwischen dem Drucke, unter dem sie stehen, und dem Volumen, das sie einnehmen, Rücksicht nehmen muss. Sie vermögen zugleich ihr Volumen beim Nachlassen des Druckes unbegrenzt zu vergrössern. Ausserdem ändert sich bei gleichem Drucke ihr Volumen sehr stark mit der Temperatur und umgekehrt. Aus diesem Grunde spielen die Wärmeerscheinungen bei der Physik der Gase eine ausschlaggebende Rolle. Das Verhalten der Gase und Dämpfe bildet in der That den Hauptgegenstand der mechanischen Wärmetheorie. Da diese einen eigenen Wissenszweig ausmacht, der sich von der Mechanik losgelöst hat und für sich behandelt wird, kann man die Mechanik der Gase kaum noch zur Mechanik im engeren Sinne rechnen. Viele von den Betrachtungen der Mechanik der unzusammendrückbaren Flüssigkeiten sind indessen auch für die Gase entweder ohne Weiteres gültig oder sie können doch mit geringen Aenderungen oder auch näherungsweise auf sie übertragen werden. Nur insofern dies zutrifft, wird in diesen Vorlesungen auch auf das Verhalten der Gase Rücksicht genommen; alle Untersuchungen, bei denen Temperaturänderungen in Betracht kommen, bleiben dagegen der mechanischen Wärmetheorie vorbehalten.

Vorher war gesagt, dass die flüssigen Körper einer Gestaltänderung ohne Raumänderung keinen Widerstand leisten; wir wollen den Sinn dieser Aussage jetzt noch weiter auseinandersetzen. Zu diesem Zwecke betrachten wir einen flüssigen

Körper, der in Ruhe ist und der eine bestimmte Gestalt hat. Entweder können wir uns diesen Körper von festen Wänden begrenzt denken oder wir können ihn uns auch durch eine geschlossene Fläche aus einer grösseren Flüssigkeitsmasse abgegrenzt denken. Im letzten Falle ist die Grenzfläche nur willkürlich gedacht und nicht materiell verwirklicht; sie hat nur den Zweck, jenen Theil der ganzen Masse, auf den wir unsere besondere Aufmerksamkeit lenken wollen, bestimmt zu bezeichnen. Auf den in dieser Weise abgegrenzten Körper wirken von aussen her Kräfte ein; zunächst die Schwerkraft oder auch andere Massenkräfte und dann die von den festen Wänden oder von der aussen angrenzenden Flüssigkeit auf die Oberfläche übertragenen Kräfte. Diese Kräfte müssen, um Gleichgewicht miteinander zu halten, zunächst den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte am starren Körper genügen. Denn, wenn der Flüssigkeitskörper dauernd in Ruhe bleiben soll, ändert er seine Gestalt nicht und wir können ihn dann vorübergehend auch als starr betrachten. Diese allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen sind aber für den flüssigen Körper nur nothwendige und nicht auch hinreichende Bedingungen; bei ihnen ist noch keine Rücksicht darauf genommen, dass die Flüssigkeit einer blossen Gestaltänderung keinen Widerstand leisten kann. Wir betrachten daher jetzt irgend eine kleine Gestalt- und Lagenänderung des Flüssigkeitskörpers, die nur der Bedingung genügt, dass keine Aenderung des Rauminhaltes mit ihr verbunden ist. In Uebereinstimmung mit dem früheren Wortgebrauche wollen wir sie als eine virtuelle Bewegung des Flüssigkeitskörpers bezeichnen. Die Bedingung, dass die Flüssigkeit einer Gestaltänderung keinen Widerstand entgegenzusetzen vermag, lässt sich dann dahin aussprechen, dass die Summe der Arbeitsleistungen aller äusseren Kräfte für jede solche virtuelle Bewegung gleich Null sein muss. Denn wäre sie nicht Null, sondern positiv, so würde diese Bewegung nur durch die Dazwischenkunft der inneren Kräfte gehindert, was gegen den Sinn der Voraussetzung verstösst und wäre sie negativ, so

müsste eine ihr entgegengesetzte virtuelle Bewegung von selbst eintreten.

Durch diese Ausführungen wird zugleich die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf das Gleichgewicht einer Flüssigkeit begründet. Hierbei darf man aber die Sache nicht etwa so ansehen, als wenn die Gültigkeit des Princips für flüssige Körper durch diese Betrachtung bewiesen werden sollte. Vielmehr erhält der Begriff des flüssigen Körpers durch diese Auseinandersetzung erst seine nähere Definition und die allgemein und darum unbestimmt gehaltene Aussage, dass der flüssige Körper einer Gestaltänderung keinen Widerstand entgegen setze, einen greifbaren Inhalt. Dass flüssige Körper in der Natur vorkommen, die dem in dieser Weise näher bezeichneten Bilde entsprechen, kann selbstverständlich durch keinerlei theoretische Betrachtung bewiesen, sondern nur aus der Erfahrung festgestellt werden.*)

Wir wollen uns ferner den flüssigen Körper durch irgend einen ebenen Querschnitt in zwei Theile getrennt denken und das Gleichgewicht des einen Theiles betrachten. Eine Gestaltänderung des ganzen Körpers ohne Aenderung des Volumens wäre offenbar in der Art möglich, dass sich der eine Theil längs des gezogenen Querschnitts gegen den anderen verschöbe. Wir wenden für diese virtuelle Bewegung das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten sowohl auf den ganzen Körper als auf den sich verschiebenden Theil an. In jedem Falle muss die Summe der Arbeiten aller äusseren Kräfte gleich Null sein. An dem sich verschiebenden Theile zählen aber zu den äusseren Kräften auch jene, die vom anderen Theile her im Querschnitte übertragen werden. Da nun die Arbeiten der übrigen äusseren Kräfte, die am ganzen Körper allein als solche vorkommen, wegen dessen Gleichgewicht schon für sich

*) Zur Beifügung dieser Bemerkung und einer sonst noch damit verbundenen Aenderung der Fassung wurde ich durch den Umstand veranlasst, dass in einer Besprechung der ersten Auflage des Buches der Mangel eines Nachweises für die Anwendbarkeit des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf flüssige Körper beanstandet wurde.

Null ergeben müssen, so folgt, dass auch die Summe der Arbeiten der im Querschnitte übertragenen Kräfte an dem sich verschiebenden Theile gleich Null ist. Hiernach können diese Druckkräfte keine Componente haben, die in den Querschnitt selbst fiele. Da dies für jede beliebig abgegrenzte Flüssigkeitsmenge und für jeden beliebig durch sie gelegten Querschnitt gilt, erkennen wir, dass die Flüssigkeit durch jedes in ihr ausgewählte Flächentheilchen nur Normalkräfte und keine Schubspannungen übertragen kann.

Dies gilt zunächst für den Gleichgewichtszustand und insofern ist dieser Schluss in Uebereinstimmung mit dem thatsächlichen Verhalten aller Körper, die man als Flüssigkeiten bezeichnet. Bei einer in beliebiger Bewegung befindlichen Wassermasse trifft er aber nicht mehr zu. Hier können in der That Schubspannungen, die man aber in diesem Falle als innere Reibungen zu bezeichnen pflegt, auftreten. In vielen Fällen sind aber diese inneren Reibungen verhältnissmässig unbedeutend, so dass sie bei einer ersten angenäherten Betrachtung ausser Acht gelassen werden können. Deshalb schreiben wir der idealen Flüssigkeit, auf die sich unsere Betrachtungen in erster Linie beziehen sollen, die Eigenschaft zu, dass überhaupt keine inneren Reibungen in ihr auftreten können.

Wir können hierfür noch einen anderen Ausdruck wählen. Die inneren Reibungen hängen nämlich, wie die Erfahrung lehrt, von den Geschwindigkeitsunterschieden zwischen benachbarten Theilen der Flüssigkeitsmasse und bei gegebenen Geschwindigkeitsunterschieden ferner noch von der Art der Flüssigkeit ab. Je grösser sie sind, desto zäher wird die Flüssigkeit genannt. Die ideale Flüssigkeit hat nach dieser Ausdrucksweise die Zähigkeit Null. Concentrirte Schwefelsäure ist z. B. viel zäher als Wasser. So lange es sich nur um die Untersuchung von Gleichgewichtszuständen handelt, also im Gebiete der Hydrostatik, macht dies aber keinen Unterschied; die Lehren der Hydrostatik gelten für Schwefelsäure oder für noch zähere Flüssigkeiten ebenso genau, wie

für das Wasser. Bei Aufgaben über die Bewegung von Flüssigkeiten spielt dagegen die Zähigkeit eine grosse Rolle; eine Lösung, die ohne Berücksichtigung der inneren Reibungen gewonnen wurde und die im gegebenen Falle für Wasser vielleicht noch hinlänglich genau richtig ist, kann für Schwefelsäure schon ganz unbrauchbar sein.

Wir kehren jetzt zur Betrachtung des aus der ganzen Flüssigkeitsmasse in beliebiger Weise abgegrenzten Körpers zurück und denken uns mit diesem eine virtuelle Bewegung vorgenommen. Der Einfachheit wegen wollen wir uns diese nur darin bestehend denken, dass irgend ein Flächentheilchen df der Oberfläche an irgend einer Stelle um dn zurückgedrängt, also einwärts geschoben wird, während an irgend einer anderen Stelle ein Flächentheilchen df' um dn' nach aussen verschoben wird (vgl. Abb. 90). Der Unzusammendrückbarkeit wegen muss das dem Körper hinzugetretene Volumen $df'dn'$ gleich dem ihm verlorenen Volumen $dfdn$ sein. Wir wissen schon, dass die Druckkräfte überall senkrecht zur Oberfläche stehen müssen. Die auf die Flächeneinheit bezogene Druckkraft an beiden Stellen sei mit p bezw. p' bezeichnet. An df wird die positive Arbeit $pdfdn$ und an df' die negative Arbeit $p'df'dn'$ geleistet. Ausserdem leistet auch die an dem Körper wirkende Massenkraft eine Arbeit. Als Massenkraft kommt gewöhnlich nur die Schwere in Betracht, und wir wollen diesen Fall hier voraussetzen. Der in der Richtung der Schwere gemessene Abstand von df und df' sei h. Für die Arbeit der Schwerkraft kommt nur in Betracht, dass sich ein Massentheilchen vom Volumen $dfdn$ um h nach unten verschoben hat (oder nach oben, wenn h negativ ist). Die Verschiebungen, die sonst noch innerhalb des Flüssigkeitsraumes

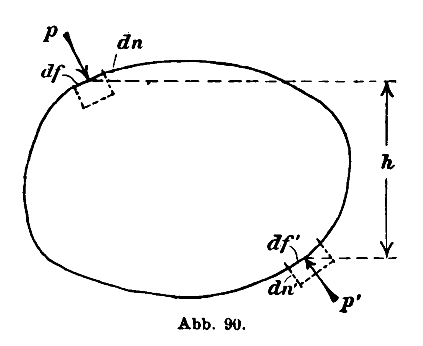


Abb. 90.

auftreten, können zur Arbeit der Schwere nichts beitragen, weil sich dabei ebenso viele Massentheilchen nach oben als nach unten hin verschieben. Das Gewicht der Volumeneinheit der Flüssigkeit sei γ. Dann ist die Arbeitsleistung der Schwerkraft bei der betrachteten Formänderung $\gamma df dn \cdot h$, und sie ist positiv, wenn h positiv ist. Die Bedingung, dass die Summe der virtuellen Arbeiten gleich Null sein muss, lautet daher

$$p df dn + \gamma df dn h = p' df' dn'$$

oder, wenn man beachtet, dass $df' dn' = df dn$ ist,

$$p' = p + \gamma h. \tag{134}$$

Hierbei ist wohl zu beachten, dass die Richtung der Flächenelemente df und df' bei der Ableitung dieser Formel ganz gleichgültig ist. Wenn $h = 0$ ist, wird $p' = p$, wie auch die Flächenelemente geneigt sein mögen. Daraus folgt zweierlei, erstens nämlich, dass an derselben Stelle der Flüssigkeit der Druck für alle Schnittrichtungen, die man durch die Flüssigkeitsmasse legen mag, denselben Werth hat, und zweitens, dass der Druck in gleichen Höhen überall gleich gross ist. Der Spannungszustand in einer vollkommenen Flüssigkeit ist daher von besonders einfacher Art; er wird für jede Stelle durch die Angabe eines einzigen Zahlenwerthes vollständig beschrieben.

Dieses Resultat gilt genau für alle Flüssigkeiten im Gleichgewichtszustande, auch für Gase. Für zähe Flüssigkeiten, die in beliebiger Bewegung begriffen sind, bleibt es aber nicht mehr streng gültig. Namentlich kann hier auch der Druck an derselben Stelle für verschiedene Schnittrichtungen merklich verschieden sein, und zwar um so mehr, je zäher die Flüssigkeit ist und je grösser die Geschwindigkeitsunterschiede zwischen benachbarten Theilen der Flüssigkeit sind.

Häufig ist das Glied γh in Gleichung (134) gegenüber p innerhalb der ganzen Flüssigkeit nur unbedeutend; die Flüssigkeit kann dann nahezu als gewichtslos betrachtet werden. Dann ist der Druck p oder p' überhaupt an allen Stellen der

Flüssigkeit und für alle Schnittrichtungen gleich gross. Dies trifft bei Gasen oder Dämpfen sehr häufig zu. Bei dem Dampfdrucke in einem Dampfkessel oder in einem Dampfcylinder braucht man z. B. auf die sehr geringfügigen Druckunterschiede in verschiedenen Höhen keine Rücksicht zu nehmen.

Auch für eine ganz beliebige kleine Gestaltänderung des Flüssigkeitskörpers lässt sich der Ausdruck für die Arbeit der Druckkräfte p leicht angeben. Versteht man nämlich jetzt unter df irgend ein Flächenelement und unter dn die Bewegung, die df nach einwärts erfährt, so gibt das über die ganze Oberfläche erstreckte Integral

$$\int p\,df\,dn$$

die von den Druckkräften geleistete Arbeit an. Dabei ist dn negativ zu rechnen, wenn es, wie vorher dn', nach aussen gerichtet ist. Auf die dabei etwa daneben auftretende, parallel zur Richtung von df gerichtete Componente der Verschiebung kommt es nämlich nicht an, weil sie senkrecht zu p steht; ebenso wird bei einer Drehung von df um eine Schwerpunktsaxe keine Arbeit von p geleistet.

Wenn p innerhalb der ganzen Flüssigkeitsmasse als constant betrachtet werden kann, vereinfacht sich der Ausdruck für die geleistete Arbeit zu

$$p\int df\,dn\,.$$

Das hier noch vorkommende Integral stellt die Volumenverminderung der ganzen Flüssigkeitsmasse dar. Bei der unzusammendrückbaren Flüssigkeit ist diese Verminderung und mit ihr die ganze Arbeit gleich Null, was ja auch in Uebereinstimmung mit den vorausgegangenen Betrachtungen steht. Man wendet aber diese Berechnung der geleisteten Arbeit auch auf Gase und Dämpfe an, bei denen sich das Volumen ändern kann. Wird das ganze Volumen mit V und die Volumenverminderung mit dV bezeichnet, so ist die von aussen zu leistende Arbeit gleich $p\,dV$. Dies gilt zunächst für eine kleine Gestaltänderung. Bei einer grösseren Volumenänderung

ändert sich auch der Druck mit V; für die Arbeit A, die hierbei aufzuwenden ist, hat man dann

$$A = \int p\, d\, V. \tag{135}$$

Dehnt sich das Gas oder der Dampf aus, wie im Cylinder einer Dampfmaschine, so wird A negativ, d. h. es wird dann eine nach Gl. (135) zu berechnende Arbeit nach aussen hin abgegeben.

Auch für das Wasser wird von diesen Betrachtungen Gebrauch gemacht, wenn es sich darum handelt, eine Wassermenge aus einem Gefässe, in dem es unter dem Drucke p_0 steht, in ein anderes mit dem Drucke p überzuführen. Die hierfür aufzuwendende Arbeit ist

$$A = V(p - p_0),$$

wenn unter V wieder das Volumen der Wassermasse verstanden wird.

§ 55. Ausfluss aus Gefässen.

Ein Gefäss, dessen Horizontalschnitt überall gross ist gegen den Querschnitt F der Ausflussöffnung, sei bis zur Höhe h über der Oeffnung mit einer unzusammendrückbaren Flüssigkeit, also etwa mit Wasser, gefüllt. Wenn ein Schieber, der die Oeffnung vorher verschlossen hatte, weggezogen wird, beginnt das Wasser zuerst mit kleinerer und dann mit allmählich wachsender Geschwindigkeit auszuströmen, bis ein Zustand hergestellt ist, der unverändert fortdauert, wenn man den oberen Wasserspiegel durch einen Zufluss immer in derselben Höhe erhält. Der stationäre Zustand stellt sich übrigens schon in kurzer Zeit ein, und um ihn allein wollen wir uns hier kümmern.

Die Bahn, die ein einzelnes Wassertheilchen zuerst innerhalb des Gefässes und dann in dem austretenden Wasserstrahle zurücklegt, wird als eine Stromlinie bezeichnet. Man denke sich eine Anzahl solcher Stromlinien angegeben. Innerhalb des Gefässes werden sie verhältnissmässig weit auseinander

liegen, während sie sich in der Mündung eng zusammendrängen. Legt man durch jeden Punkt einer geschlossenen Curve, die im Gefässe beliebig, etwa in einer horizontalen Ebene, gewählt wird, eine Stromlinie, so wird dadurch ein Raum abgegrenzt, durch den die innerhalb liegenden Wassertheilchen so fliessen, als wenn sie in einer Röhre von dieser Gestalt eingeschlossen wären. Man nennt daher diesen Raum eine Stromröhre oder, wenn der Querschnitt sehr klein ist, einen Stromfaden. Auch der Stromfaden ist oben weiter und verengt sich in der Mündung. Durch jeden Querschnitt des Stromfadens fliesst aber dieselbe Wassermenge; je kleiner daher der Querschnitt wird, desto grösser muss die Geschwindigkeit werden. Die Geschwindigkeit ist demnach am grössten, wo die Stromlinien am engsten zusammenliegen. Dies braucht nicht grade in der Mündung selbst der Fall zu sein. Wenn die Mündung durch einen Ausschnitt in einer dünnen Wand gebildet wird, drängen sich vielmehr die Stromlinien in ihr von den Seiten her zusammen und convergiren, da sie die augenblickliche Bewegungsrichtung nicht plötzlich ändern können, auch noch jenseits der Mündung, bis der engste Querschnitt erreicht ist. Diese Erscheinung wird als die Einschnürung oder die Contraction des Wasserstrahls bezeichnet. Durch eine Ansatzröhre, die sich nach der Mündung zu selbst allmählich zusammenzieht, kann aber eine weitere Einschnürung nach dem Durchlaufen der Mündung vermieden werden.

Es handelt sich jetzt darum, die grösste Geschwindigkeit im eingeschnürten Querschnitte in der Nähe der Mündung zu berechnen; wir bezeichnen sie mit v. Die in einer Secunde ausfliessende Wassermenge sei, in Volumeneinheiten ausgedrückt, mit Q bezeichnet; das Gewicht von Q ist gleich γQ, wenn γ das Gewicht der Volumeneinheit ist. Nach Ablauf einer Secunde ist der Zustand sonst überall noch derselbe, wie vorher; dagegen ist ein Wassergewicht γQ in der Höhe des oberen Wasserspiegels fortgenommen und ebenso viel Wasser ist unten ausgeströmt. Oben hatte das Wasser eine

potentielle Energie, während das ausströmende Wasser eine lebendige Kraft besitzt, die jener gleich sein muss, wenn andere Energieumwandlungen daneben nicht vorkommen. Bei einer vollkommenen Flüssigkeit sind solche nicht möglich, wohl aber bei einer zähen Flüssigkeit, in der durch die Ueberwindung der inneren Reibungen mechanische Energie verbraucht und in Wärme umgesetzt wird. Die potentielle Energie, die einem Höhenunterschiede h entspricht, ist gleich $\gamma Q h$ und die lebendige Kraft der gleichen Wassermasse ist bei der Geschwindigkeit v gleich $\frac{\gamma Q v^2}{2g}$. Setzt man beide Werthe einander gleich, so erhält man

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Um aber auf die Zähigkeit der Flüssigkeit Rücksicht zu nehmen, durch die v vermindert wird, setzen wir anstatt dessen

$$v = c\sqrt{2gh}. \tag{136}$$

Der Factor c heisst der Geschwindigkeitscoefficient; er muss nothwendig ein ächter Bruch sein und kann durch Versuche ermittelt werden. Solche Versuche sind für Wasser schon oft angestellt worden und haben ungefähr den Werth $c = 0,97$ ergeben. Das ist nicht viel weniger als Eins. Beim Ausflusse des Wassers macht sich also die Zähigkeit nicht sehr bemerklich; dieser erfolgt fast genau so, wie bei einer vollkommenen Flüssigkeit. Bei zäheren Flüssigkeiten kann aber c natürlich erheblich kleiner werden.

Auch die Ausflussmenge Q ergibt sich leicht aus Gl. (136). Findet bei einer passenden Ansatzröhre unmittelbar nach dem Verlassen der Mündung keine Einschnürung mehr statt, so erhält man Q durch Multiplication der Mündungsfläche mit v. Man kann sich nämlich die ganze in der Zeiteinheit ausfliessende Menge in Gestalt eines Cylinders von der Grundfläche F angeordnet denken, dessen Höhe gleich dem in der Zeiteinheit zurückgelegten Wege v ist. Im Allgemeinen, namentlich beim Ausflusse aus dünner Wand, findet aber noch eine Einschnürung statt. An Stelle des Querschnitts F der

Mündungsfläche tritt dann der eingeschnürte Querschnitt $c'F$. Der Factor c' heisst der Contractionscoefficient und wird am besten ebenfalls auf dem Wege des Versuchs ermittelt. Man kann nämlich auch auf dem Wege der Rechnung eine Schätzung seiner Grösse erlangen, wenn man den Verlauf der Stromlinien näher verfolgt. Diese Rechnung ist aber nicht nur sehr mühsam, sondern sie liefert auch nicht so zuverlässige Resultate als ein unmittelbarer Versuch. Im Uebrigen hängt c' nicht nur von der Gestalt der Ansatzröhre oder der Zuschärfung der Wand an der Austrittsstelle, sondern auch von der Querschnittsform des Strahles ab. In erster Annäherung kann man, namentlich für einen kreisförmigen Strahlquerschnitt, bei dem Ausflusse aus dünner Wand c' etwa gleich 0,64 setzen.

Für Q erhält man hiermit

$$Q = c'Fv = cc'F\sqrt{2gh}. \tag{137}$$

Das Product der beiden Erfahrungscoefficienten c und c' kann auch zu einem einzigen Factor k zusammengefasst werden, der der Ausflusscoefficient genannt wird. Man erhält dann

$$Q = kF\sqrt{2gh}. \tag{138}$$

Für den Ausfluss aus dünner Wand wird nach dem vorher Bemerkten k etwa gleich 0,62.

Bisher war vorausgesetzt, dass der Druck, durch den das Wasser zum Ausfliessen gebracht wird, durch das Gewicht der Wassersäule von der Höhe h veranlasst sei. Es kann aber keinen Unterschied machen, wenn das Wasser in Wirklichkeit nicht bis zur Höhe h reicht, sondern wenn der Druck der darüber hinaus gehenden Wassersäule in anderer Weise ersetzt wird. Lässt man also z. B. das Wasser aus einem unter Druck stehenden Dampfkessel durch ein unten angebrachtes Rohr ausströmen, so wird die Ausflussgeschwindigkeit nicht nur durch die Höhe des Wasserspiegels im Dampfkessel bedingt, sondern man muss dazu noch eine Wassersäule rechnen, deren Höhe dem Dampfdrucke im Kessel entspricht. Dabei ist zu beachten, dass ein Druck von 1 atm oder von

1 kg/qcm durch eine Wassersäule von 10 m Höhe hervorgerufen wird. Wenn der Dampfüberdruck im Kessel 5 atm beträgt, ist also für h die um 50 m vermehrte Höhe des Wasserspiegels im Dampfkessel über dem Ausflussquerschnitte in die vorigen Formeln einzuführen.

Hierbei ist freilich zu beachten, dass beim Ausströmen des Wassers aus einem Dampfkessel zugleich ein theilweises Verdampfen eintritt. Wenn aber zum Theile Dampf anstatt Wasser ausströmt, muss dadurch die ausströmende Menge geändert werden. In dieser allgemeinen Fassung handelt es sich hier um ein Problem der mechanischen Wärmetheorie, das übrigens bisher noch keine befriedigende Lösung gefunden hat. Nach privaten Mittheilungen, die ich darüber erhielt, sind indessen bei Versuchen, die freilich keinen Anspruch auf grosse Genauigheit erheben können, Ausflussmengen beobachtet worden, die nicht viel kleiner waren, als sie sich unter der Voraussetzung berechnen, dass das ganze Wasser als solches und nicht als Dampf ausströme. Mit grösserer Zuverlässigkeit kann freilich von der vorausgehenden Betrachtung nur dann Gebrauch gemacht werden, wenn man sich den Dampf etwa durch Luft von der gleichen Spannung ersetzt denkt und das Wasser die Temperatur der Umgebung hat, so dass ein Verdampfen nicht in Betracht kommt.

Für den Ausfluss von Gasen aus einem Gefässe kann man übrigens die vorausgehenden Formeln ebenfalls verwenden, so lange der Druckunterschied, der den Ausfluss bewirkt, nicht sehr erheblich ist, also etwa bei dem Ausflusse aus einer Leuchtgasleitung oder aus einem Ventilationsschachte o. dgl., wo der Druckunterschied in einigen cm Wassersäule ausgedrückt werden kann. Unter h ist dann in den vorausgehenden Formeln die Höhe einer Gassäule zu verstehen, deren Gewicht bei überall gleicher Dichte hinreicht, um den gegebenen Druck auf die Grundfläche hervorzubringen. So ist z. B. Wasser ungefähr 800 mal schwerer als Zimmerluft. Ein Druckunterschied, der durch eine Wassersäule von 1 cm Höhe gemessen wird, entspricht daher einem Werthe h von 8 m für Luft.

unter den gewöhnlich vorliegenden Verhältnissen, bei Leuchtgas, das leichter ist als Luft, entsprechend mehr.

Bei grossen Druckunterschieden, also z. B. solchen von 1 atm, werden die früheren Formeln für Gase unzuverlässig. Dies rührt namentlich davon her, dass das Gas bei so grossen Druckunterschieden sein Volumen sehr stark ändert und damit zugleich auch seine Temperatur.

§ 56. Veränderlichkeit des Druckes in einem Stromfaden.

Die in § 54 abgeleitete Gleichung (134)

$$p' = p + \gamma h$$

gilt nur für den Fall des Gleichgewichts. In einem Stromfaden einer strömenden Flüssigkeit befolgt die Veränderlichkeit des Druckes ein anderes Gesetz, zu dessen Herleitung wir uns durch zwei Querschnitte df und df' einen Wasserkörper aus dem Stromfaden abgegrenzt denken wollen. Wir beobachten die Bewegung dieses Körpers während eines kleinen Zeittheilchens. Während dessen mögen sich die Wassertheilchen des oberen Querschnitts df (vgl. Abb. 91) um dn in der Richtung der Stromlinien und die von df' um dn' bewegen. Da durch den Mantel des Stromfadens keine Bewegung erfolgt, muss der Raumbeständigkeit wegen $dfdn$ gleich $df'dn'$ sein. Die an der Mantelfläche wirkenden Druckkräfte leisten bei dieser Bewegung keine Arbeit, da wir eine vollkommene Flüssigkeit voraussetzen, bei der der Druck stets rechtwinklig zur Grenzfläche, hier also rechtwinklig zur Bewegungsrichtung steht.

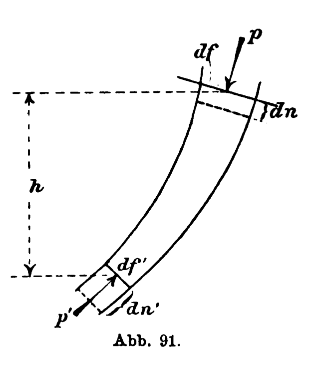


Abb. 91.

Der Druck auf die obere Querschnittsfläche des Wasserkörpers ist gleich pdf und die von ihm geleistete Arbeit gleich $pdfdn$. Diese ist positiv; ihr steht die negative Arbeitsleistung vom Betrage $p'df'dn'$ des auf die untere

…zfläche wirkenden Druckes gegenüber. Die Arbeitsleistung
Schwere ist positiv und gleich $\gamma d f d n \cdot h$, da sich im
…nzen ein Wassertheilchen vom Volumen $d f d n$ um die Höhe h
…ch abwärts bewegt hat, während sich sonst an der Ver-
…eilung der Flüssigkeit über den Stromfaden nichts änderte.

Bis dahin ist die Betrachtung genau in Uebereinstimmung mit der in § 54 angewendeten. Hier kommt aber noch hinzu, dass sich auch die lebendige Kraft geändert hat. Zwischen dem unteren Ende von dn und dem oberen von dn' sind zwar die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen, die sich grade an irgend einer gegebenen Stelle befinden, noch genau so gross, [illegible], als sie an derselben Stelle zu Anfang waren, da wir ein[illegible] stationäre Strömung voraussetzen. Die einzige Aenderung i[illegible] der lebendigen Kraft des betrachteten Wasserkörpers kommt demnach darauf hinaus, dass oben ein Element vom Volumen $d f d n$ mit der Geschwindigkeit v wegfällt, während dafür unten ein ebenso grosses Volumen mit der Geschwindigkeit v' hinzutritt. Wenn v' grösser als v ist, bedeutet dies einen Zuwachs an lebendiger Kraft von der Grösse $\frac{\gamma d f d n}{2 g}(v'^2 - v^2)$. Dieser Zuwachs wird durch den Ueberschuss der positiven Arbeiten der äusseren Kräfte über die negativen bewirkt. Wir haben also die Arbeitsgleichung

$$p d f d n - p' d f' d n' + \gamma d f d n h = \frac{\gamma d f d n}{2 g}(v'^2 - v^2) \qquad (139)$$

und da $d f d n = d f' d n'$ ist, folgt daraus

$$p' + \frac{\gamma v'^2}{2 g} = p + \frac{\gamma v^2}{2 g} + \gamma h .$$

Abgesehen von dem Höhenunterschiede h, der bei dem bewegten Wasser ebenso wie bei dem ruhenden für sich genommen eine Druckvermehrung in den tiefer liegender Schichten bewirkt, wird demnach der Druck um so kleine je grösser die Geschwindigkeit ist. Deshalb vermindert si… z. B. der Druck auch schon im Inneren eines Gefässes, … Ausfluss erfolgt, in der Nähe der Mündung, je …

sich die Stromlinien zusammendrängen und damit die Geschwindigkeit steigt.

Oft ist es bequem, für Gl. (139) eine etwas geänderte Ausdrucksform zu wählen. Für einen Körper, der aus der Höhe H frei herabfällt, ist nämlich

$$\frac{v^2}{2g} = H.$$

Man bezeichnet diese Höhe H als die Geschwindigkeitshöhe und kann mit ihrer Benutzung Gl. (139) in der Form

$$p' = p + \gamma(h + H - H') \tag{140}$$

anschreiben. Damit nähert sich die Aussage wieder mehr der für den Gleichgewichtzustand gültigen Gleichung (134).

Von den vielfachen Anwendungen, die man von Gl. (139) oder (140) macht, sei hier als Beispiel nur eine hervorgehoben. Es möge sich darum handeln, die Geschwindigkeit zu messen, mit der das Wasser an irgend einer Stelle durch das Hauptrohr einer Wasserleitung strömt. Um Betriebsstörungen, die gelegentlich durch den in das Rohr eingeschalteten Messapparat hervorgerufen werden könnten, zu vermeiden, ist es erwünscht, dass dieser keine beweglichen Theile im Rohre selbst besitze. Um diese Aufgabe zu lösen, kann man dem Rohre an der betreffenden Stelle auf eine kurze Strecke einen kleineren Querschnitt geben. Das Wasser ist dann genöthigt, diese Strecke mit entsprechend grösserer Geschwindigkeit zu durchfliessen und dabei sinkt nach Gl. (139) der Druck. Man braucht jetzt nur den Druckunterschied $p' - p$ zwischen der verengten Stelle und dem weiteren Rohre zu messen, um aus Gl. (139) sofort die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate zu erhalten. Diese Messung kann mit Hülfe eines Manometers, dem man eine für diesen Zweck passende Form gibt, leicht ausgeführt werden. Da zugleich das Verhältniss der Geschwindigkeiten v' und v aus der Gleichung $v'F' = vF$, wenn F und F' die Querschnittsflächen bedeuten, bekannt ist, folgen sofort beide Geschwindigkeiten und damit auch die Wassermenge, die zur Zeit der Beobachtung in jeder Secunde durch die Leitung fliesst.

Nach Durchströmen der verengten Stelle verringert sich die Geschwindigkeit wieder und damit wächst der Druck ungefähr wieder auf denselben Werth wie vor der Einschnürung. Bei einer vollkommenen Flüssigkeit, für die Gl. (139) streng gilt, könnte überhaupt kein Druckverlust durch die Einschaltung der engeren Strecke herbeigeführt werden. Beim Wasser ist dies aber anders; beim Uebergange aus dem weiteren Rohre in den engeren Theil und umgekehrt treten grössere Geschwindigkeitsunterschiede zwischen benachbarten Stromfäden und mit ihnen innere Reibungen auf, deren Ueberwindung einen Druckverlust verursacht. Durch sanfte Uebergänge aus dem weiteren in den engeren Theil kann der Druckverlust herabgesetzt werden. Er kann natürlich ebenfalls leicht durch manometrische Messungen zwischen dem vor und dem hinter der verengten Stelle liegenden Theile der Rohrleitung gemessen werden. Der Erfahrung nach ist er unter sonst gleichen Umständen dem Quadrate der Geschwindigkeit in der weiteren Leitung proportional zu setzen.

Wenn v' durch starke Verengung des Querschnitts an irgend einer Stelle sehr gross würde, lieferte Gl. (139) einen negativen Werth von p'. In diesem Falle trennt sich aber das Wasser von der Gefässwand und es bildet innerhalb des Gefässes einen freien Strahl. Die Geschwindigkeit wird dann an dieser Stelle nur so gross, als wenn das Wasser ins Freie ausströmte. Mit dieser Erscheinung ist ein Druckverlust verbunden, der durch eine nachfolgende Erweiterung des Querschnitts nicht wieder ausgeglichen werden kann.

Anders als diese Erscheinungen ist die Wirkung der Strahlpumpen zu beurtheilen. Bei diesen mündet ein von einer Druckwasserleitung versorgtes Rohr innerhalb eines an beiden Enden offenen Rohres aus, das von unter niederem Drucke stehendem Wasser gefüllt ist. Das aus der Druckleitung mit grosser Geschwindigkeit ausströmende Wasser reisst das es umgebende Niederdruckwasser durch Reibung mit fort. Dabei vermischen sich beide Wassermassen und sie nehmen eine mittlere Geschwindigkeit an, mit der sie aus dem

weiteren Rohre ausströmen. Hierbei kommen die Gesetze des unelastischen Stosses zur Geltung. Die Bewegungsgrösse des vereinigten Wasserstrahles ist ebenso gross als die Bewegungsgrösse, die dem Hochdruckstrahle allein entsprechen würde. Durch dieses einfache Mittel vermag man eine grosse Wassermenge mit Hülfe einer kleineren Betriebswassermenge leicht auf eine Höhe von einigen Metern zu heben. Man muss aber beachten, dass dabei ein Arbeitsverlust von derselben Grösse, wie er früher für den unelastischen Stoss, also für das Ende der ersten Stossperiode, berechnet wurde, mit in den Kauf genommen werden muss. Als wirthschaftlich sind daher die Strahlpumpen im Allgemeinen nicht zu betrachten; nur, wo es auf den Arbeitsverlust nicht wesentlich ankommt, sind sie ihrer Einfachheit wegen, die zugleich Betriebsstörungen fern hält, am Platze.

Auch auf Gase und Dämpfe sind alle diese Betrachtungen im Allgemeinen (falls nämlich nicht sehr grosse Druckunterschiede auftreten) anwendbar. Eine besondere Erwähnung verdient noch die Dampfstrahlpumpe oder der Injector, der zur Zuführung des Speisewassers in einen im Betriebe stehenden Dampfkessel benutzt wird. Ein Dampfstrahl tritt aus dem Kessel mit viel grösserer Geschwindigkeit aus, als ein Wasserstrahl. Dies rührt davon her, dass derselbe Druck p einer viel grösseren Druckhöhe h der Dampfsäule entspricht, als die Höhe der Wassersäule beträgt, die den Druck p herbeiführt. Der austretende Dampfstrahl wird nun, indem er sich mit dem ihn umgebenden Speisewasser mischt, ganz oder zum Theile condensirt. Dabei verliert er freilich den grössten Theil seiner Geschwindigkeit, so dass die Bewegungsgrösse des entstehenden Gemisches ebenso gross bleibt, wie zuvor. Aber auch diese verminderte Geschwindigkeit, mit der sich nun das Gemisch in dem Rohre weiter bewegt, ist noch grösser als jene, mit der ein Wasserstrahl aus dem Dampfkessel ausströmen würde. Diese Geschwindigkeit kann nun nach Gl. (139) wieder in einen Druck umgewandelt werden, der hinreicht, um das Ventil, das den Zugang zum Kessel

rschliesst, zu heben. In der That wird nämlich in demelben Maasse, als die Condensation des Dampfes fortschreitet, die Geschwindigkeit in den weiter folgenden Querschnitten des überall gleich weiten Rohres verringert und damit wächst der Druck.

Eine ausführliche rechnerische Verfolgung des Vorgangs kann nur auf Grund der Lehren der mechanischen Wärmetheorie über das Verhalten des Wasserdampfes gegeben werden; hier müssen daher diese Andeutungen über den der eigentlichen Mechanik angehörigen Theil der Theorie des Injectors genügen.

§ 57. **Besondere Fälle des Ausflusses aus Gefässen.**

Die Untersuchung in § 55 bezog sich nur auf den Ausfluss aus einer gegen die Druckhöhe kleinen Oeffnung ins Freie. Wir wollen sie jetzt auf einige andere Fälle übertragen und zwar zunächst auf den Ausfluss unter Wasser. Zwei Gefässe seien durch eine Wand getrennt, in der sich eine Oeffnung befindet. Die Druckhöhe im einen Gefässe, etwa bis zur Mitte der Oeffnung gerechnet, sei h, die im anderen h' und es sei $h > h'$. Maassgebend für die Geschwindigkeit v, mit der das Wasser aus dem ersten in das zweite Gefäss überströmt, ist der Druckhöhenunterschied $h - h'$. Man vergleicht diesen Fall mit dem anderen, dass das Wasser unter der Druckhöhe $h - h'$ unmittelbar ins Freie ausfliesst, setzt also

$$v = c\sqrt{2g(h - h')}, \qquad (141)$$

woraus man durch Multiplication mit der Querschnittsfläche des austretenden Strahles auch die Ausflussmenge erhält.

Gestützt wird diese Betrachtung durch die Ueberlegung, dass die Geschwindigkeit des austretenden Strahles durch die äusseren Bedingungen daran gehindert ist, das Wasser wieder auf eine grössere Höhe als h' zu heben. Die Geschwindigkeit v wird daher als verloren für die Erzielung einer grösseren Druckhöhe angesehen. Die ihr entsprechende Energie verliert

sich in den Wirbeln, die der Ausfluss im Gefolge hat, und wird durch Ueberwindung der dabei auftretenden inneren Reibungen in Wärme verwandelt. Die hierbei ins Spiel kommende potentielle Energie ist für das Wassergewicht γQ gleich $\gamma Q (h - h')$ und die in Verlust gehende lebendige Kraft gleich $\frac{\gamma Q v^2}{2g}$, woraus durch Gleichsetzung der vorher angegebene Werth von v folgt.

Recht befriedigend ist diese Betrachtung freilich nicht. Es ist von vornherein keineswegs ausgemacht, dass die ganze lebendige Kraft des ausfliessenden Strahles vollständig in Wärme verwandelt wird. Es könnte recht wohl der Druck in der Ausflussöffnung unter h' sinken und sich durch theilweise Umwandlung der Geschwindigkeitshöhe H in einiger Entfernung von der Mündung auf den normalen Werth im zweiten Gefässe erhöhen. Dann müsste v grösser werden, als vorher angegeben war. Um das thatsächliche Verhalten festzustellen, ist man daher auf die Ergebnisse von Versuchen angewiesen. Soweit diese bisher vorliegen, rechtfertigen sie indessen im Allgemeinen den vorher gewählten Ansatz. In Fällen, bei denen ein genauer Werth der Ausflussmenge von Wichtigkeit ist, thut man aber jedenfalls am besten daran, unmittelbare Versuche zur Feststellung des mit der Formel in Verbindung zu bringenden Ausflusscoefficienten anzustellen.

Ferner sei jetzt der Fall untersucht, dass die Höhe der Oeffnung verhältnissmässig gross ist gegen die Druckhöhe, so dass es nicht mehr zulässig ist, die Druckhöhe und mit ihr die Ausflussgeschwindigkeit für alle Punkte der Mündungsfläche als gleich gross anzusehen. Für den Ausfluss unter Wasser macht die grössere Höhe der Ausflussfläche natürlich keinen Unterschied, da $h - h'$ doch überall denselben Werth hat. Wenn aber der Ausfluss ins Freie erfolgt, sei x die Höhe des Wasserspiegels über einem Flächentheilchen des Ausflussquerschnitts. Dann ist die Geschwindigkeit v an dieser Stelle, wenn von der Multiplication mit den Coefficienten zunächst abgesehen wird,

$$v = \sqrt{2gx}$$

daher die ganze secundliche Ausflussmenge

$$Q = \int v\,dF = \sqrt{2g}\int\sqrt{x}\,dF.$$

ie Summirung ist über die ganze Fläche des Ausflussquer-chnitts zu erstrecken. Um sie wirklich ausführen zu können, muss man die Gestalt dieses Querschnitts kennen. Wir wollen annehmen, dass der Querschnitt ein Rechteck von den horizontalen Seiten b bildet, von denen die untere um h, die obere um h' unter dem Wasserspiegel liegt, so dass $h - h'$ die Höhe des Rechtecks angibt. Da x der Breite nach constant ist, kann man für dF sofort $b\,dx$ schreiben und erhält

$$Q = b\sqrt{2g}\int_{h'}^{h}\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}b\sqrt{2g}\left(h^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}\right). \qquad (142)$$

Hierzu tritt dann noch der Ausflusscoefficient, der ebenso gross wie früher anzunehmen ist, als Factor.

Ein besonderer Fall liegt vor, wenn $h' = 0$ ist, wenn sich also die Ausflussfläche bis zum oberen Wasserspiegel erstreckt, wie es z. B. bei den Ueberfallwehren zutrifft (vgl. Abb. 92). Mit $h' = 0$ und Beifügung des Ausflusscoefficienten k geht Gleichung (142) über in

$$Q = \frac{2}{3}kb\sqrt{2gh^3} = \frac{2}{3}kF\sqrt{2gh}, \qquad (143)$$

wobei noch die Rechteckfläche $F = bh$ eingeführt ist. Un-mittelbar über dem Wehre selbst senkt sich der Wasserspiegel; unte h ist aber die Höhe des Wasse spiegels in einiger Entfernung üb der Wehroberkante zu versteh Die Senkung kommt nämlich n für die Geschwindigkeit in Betr sondern nur für den Durchfluss schnitt, der wegen dieser Senkung eine Einschnürung er die in dem Ausflusscoefficienten k schon berücksichtigt

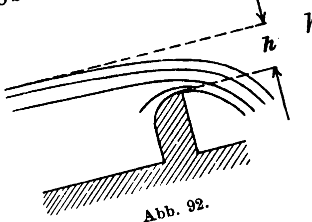


Abb. 92.

§ 58. **Ausflusszeiten.**

Bis jetzt war immer angenommen worden, dass der Wasserspiegel in dem Gefässe durch einen Zufluss dauernd in derselben Höhe erhalten wird. Wenn sich der Wasserspiegel in Folge des Ausflusses allmählich senkt, gelten die früheren Formeln für v und Q in jedem Augenblicke für die grade bestehende Druckhöhe x, die mit der Zeit veränderlich ist. Um zu berechnen, wie lange es dauert, bis sich die Druckhöhe von ihrem anfänglichen Werthe h bis auf h' gesenkt hat, gehe man von den beiden Gleichungen

$$Q = kf\sqrt{2gx} \quad \text{und} \quad Qdt = -Fdx$$

aus, in denen f den Querschnitt der Ausflussöffnung und F den Querschnitt des Gefässes in der Höhe x bedeuten. Die zweite Gleichung spricht aus, dass der Wasserinhalt des Gefässes um Fdx abnimmt, wenn die Menge Qdt im Zeitelemente dt ausfliesst. Die Höhen x sind von der Ausflussöffnung nach oben hin gezählt. Setzt man den Werth von Q aus der ersten in die zweite Gleichung ein und ordnet so, dass auf der einen Seite nur die mit x behafteten Factoren stehen, so erhält man

$$\frac{kf\sqrt{2g}}{F}\,dt = -\frac{dx}{\sqrt{x}}. \tag{144}$$

Die Gleichheit der Differentialausdrücke erfordert, dass sich die zugehörigen Integrale nur um eine constante Grösse unterscheiden können. Durch Integration folgt daher

$$\frac{kf\sqrt{2g}}{F}\,t = C - 2\sqrt{x}.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten C dient die Bedingung, dass zu Anfang des Vorgangs, also zur Zeit $t = 0$, die Wasserhöhe den Werth h hatte. Damit die Gleichung für diesen Augenblick erfüllt ist, muss also $C = 2\sqrt{h}$ gesetzt werden; man erhält daher

$$t = \frac{2(\sqrt{h} - \sqrt{x})}{kf\sqrt{2g}}\,F$$

oder, wenn die Zeit bis zu dem Augenblicke berechnet werden soll, für den $x = h'$ ist,

$$t = \frac{2(\sqrt{h} - \sqrt{h'})}{kf\sqrt{2g}} F. \qquad (145)$$

Auch die bis zur völligen Entleerung des Gefässes verfliessende Zeit ist hiermit gegeben, wenn man $h' = 0$ setzt.

Bei der Ableitung dieser Formel war vorausgesetzt, dass F constant, das Gefäss also cylindrisch sei. Im anderen Falle ist Gl. (144) in der Form

$$kf\sqrt{2g} \cdot dt = -\frac{F}{\sqrt{x}} dx$$

anzuschreiben und die Integration erst auszuführen, nachdem F in x ausgedrückt ist. Im Uebrigen wird aber dadurch an dem Rechnungsgange nichts geändert.

Man kann auch die Aufgabe umkehren, nämlich die Veränderlichkeit des Querschnitts F so bestimmen, dass sich der Wasserspiegel nach einem vorgeschriebenen Gesetze senkt. Verlangt man z. B., dass sich der Wasserspiegel in gleichen Zeiten stets um gleich viel senke, so muss, weil jetzt dx proportional mit dt ist,

$$\frac{F}{\sqrt{x}} = K \quad \text{oder} \quad F = K\sqrt{x}$$

sein, wenn K ein beliebig zu wählender constanter Werth ist.

Auch auf den Ausfluss unter Wasser lassen sich diese Betrachtungen ohne jede wesentliche Aenderung ausdehnen.

§ 59. Druck eines Wasserstrahls gegen eine feste Wand.

Ein Wasserstrahl, der senkrecht auf eine feste Wand trifft, breitet sich nach dem Auftreffen nach allen Seiten hin aus und das Wasser fliesst längs der Wand ab. Die Bewegung erfolgt freilich in Wirklichkeit nicht ganz so regelmässig, wie wir sie dabei voraussetzen; namentlich tritt, wie man aus der Erfahrung weiss, zugleich ein Umherspritzen von Tropfen ein, die sich aus der Wassermasse loslösen und zurückprallen. Dieses Zurückprallen erinnert Jeden, der die Erscheinung be-

obachtet, an die Vorgänge beim elastischen Stosse. In der That kommt hierbei die Elasticität des Wassers, also seine Fähigkeit, sich unter Druck etwas zusammen pressen zu lassen und hierbei Formänderungsarbeit aufzuspeichern, mit ins Spiel. Da es sich aber jetzt nur um eine näherungsweise Darstellung des Vorgangs handelt, können wir von diesen minder wesentlichen Begleiterscheinungen absehen.

Der Querschnitt des Strahls vor dem Auftreffen sei gleich F, die Geschwindigkeit gleich v, die in der Zeiteinheit durch den Strahl zugeführte Wassermenge Q daher gleich Fv. Diese Wassermenge Q vom Gewichte γQ hatte vor dem Auftreffen auf die Wand eine rechtwinklig zu dieser gerichtete Bewegungsgrösse vom Werthe $\gamma \frac{Q}{g} v$ oder

$$\frac{\gamma F v^2}{g}.$$

Nach dem Auftreffen fliesst das Wasser nach allen Seiten hin gleichmässig ab. Die Bewegungsgrösse ist gleich der geometrischen Summe der Bewegungsgrössen der einzelnen Wassertheilchen, also, da diese nach entgegengesetzten Richtungen mit gleichen Geschwindigkeiten abfliessen, gleich Null. Nach dem Satze vom Antriebe ist aber das Zeitintegral der von aussen übertragenen Kraft gleich dem Unterschiede der Bewegungsgrössen vor und nach Einwirkung dieser Kraft, oder

$$\int \mathfrak{P} dt = m\mathfrak{v} - m\mathfrak{v}_0.$$

Die äussere Kraft $\mathfrak{P}$, die auf die Wassermasse einwirkt, während sie sich aus der ursprünglichen Bewegungsrichtung in jene parallel zur Wand umbiegt, ist die von der Wand aus übertragene. Der Druck des Strahls auf die Wand ist nach dem Gegenwirkungsgesetze ebenso gross und entgegengesetzt gerichtet. Verstehen wir also unter P den Stossdruck des Strahles, so ist auch

$$\int P dt = \frac{\gamma F v^2}{g}.$$

Nun ist P der Zeit nach constant und die Zeit der Einwirkung

ist gleich der Zeiteinheit. Für $\int P dt$ haben wir also hier $P \cdot 1$ oder kurz P zu setzen. Wir erhalten daher

$$P = \frac{\gamma F v^2}{g}, \tag{146}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Führt man an Stelle der Geschwindigkeit v die Geschwindigkeitshöhe H

$$H = \frac{v^2}{2g}$$

ein, so geht Gl. (146) über in

$$P = 2\gamma \cdot F \cdot H. \tag{147}$$

Den Strahl können wir uns aus einem Gefässe austretend denken, in dem die Druckhöhe gleich H ist. Denkt man sich ferner die Ausflussöffnung dieses Gefässes durch einen Mündungsdeckel verschlossen, so ist der hydrostatische Druck auf diesen Deckel gleich dem Gewichte einer Wassersäule vom Querschnitte F und der Höhe H, also gleich $\gamma F H$. Gl. (147) kann demnach dahin ausgesprochen werden, dass der hydrodynamische Druck des Strahles auf die ebene Wand doppelt so gross ist, als der hydrostatische Druck auf diese Wand wäre, wenn sie so gegen das Gefäss hin verschoben würde, dass sie die Ausflussöffnung vollständig absperrte.

Bei dieser Ueberlegung ist keine Rücksicht darauf genommen, dass erstens die Geschwindigkeit des austretenden Strahles etwas kleiner ist, als es der Gleichung $H = \frac{v^2}{2g}$ entspricht und dass zweitens der Strahl im Allgemeinen eine Einschnürung erfährt. Der erste Umstand ändert freilich nicht viel, da sich der Geschwindigkeitscoefficient nur wenig von der Einheit unterscheidet; den anderen kann man sich durch Wahl einer passenden Ansatzröhre vermieden denken. Immerhin ist indessen der Druck des Strahls hiernach etwas kleiner als das Doppelte des Drucks auf den Mündungsdeckel der Ansatzröhre, aus der man sich den Strahl hervorgegangen denken kann. Andererseits ist aber auch keine Rücksicht darauf genommen, dass einzelne Wassertheilchen wegen der Elasticität des Wassers von der Wand zurückprallen und

nicht einfach ihr entlang fliessen. Die Aenderung der Bewegungsgrösse wird hierdurch vergrössert und mit ihr auch der Stossdruck. Da sich schwer übersehen lässt, welcher Umstand den anderen überwiegt, kann man näherungsweise annehmen, dass sich beide ausgleichen, Gl. (147) also ohne weitere Correctur als ungefähr richtig ansehen.

Wenn die Fläche, gegen die der Strahl stösst, eine Umdrehungsfläche ist, auf die der Strahl in der Richtung der Axe auftrifft, lässt sich P in ganz ähnlicher Weise ableiten. Ist die Fläche gegen den Strahl hin erhaben, so wird P kleiner. Bildet die Richtung, in die das Wasser zuletzt abgelenkt wird, mit der ursprünglichen Bewegungsrichtung den Winkel α, so ist die geometrische Summe der Bewegungsgrössen von Q nach der vollzogenen Ausbreitung und Ablenkung gleich

$$\frac{\gamma F v^2}{g} \cos \alpha .$$

Der Absolutbetrag der Geschwindigkeit kann sich nämlich, wenn von der Reibung des Wassers an der getroffenen Fläche abgesehen wird, durch den überall normal zur Bewegungsrichtung stehenden Wanddruck nicht ändern. Dabei heben sich aber die rechtwinklig zur ursprünglichen Strahlrichtung stehenden Componenten der Bewegungsgrössen wegen der gleichmässigen Ausbreitung nach allen Seiten hin gegen einander auf. Es bleibt also nur die Summe der parallel zur Strahlrichtung noch vorhandenen Componenten der Bewegungsgrössen übrig und diese nimmt, da $v \cos \alpha$ die Componente der Geschwindigkeit in dieser Richtung ist, den vorher angegebenen Werth an. Man erhält daher jetzt

$$P = \frac{\gamma F v^2}{g} (1 - \cos \alpha). \tag{148}$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ geht diese Formel wieder in die frühere über.

Aber auch dann, wenn die Fläche dem Strahle ihre Hohlseite zukehrt, bleibt Gl. (148) bestehen. Man muss dann nur beachten, dass α ein stumpfer Winkel und $\cos \alpha$ daher negativ wird. Die Summe der Bewegungsgrössen nach dem Stosse

ist dann entgegengesetzt mit der ursprünglichen gerichtet. Die Aenderung der Bewegungsgrösse und der Stossdruck werden hierdurch verstärkt. Ist die Fläche z. B. eine Halbkugelschale, die von der Hohlseite her getroffen wird und deren Halbmesser gross genug gegen die Breite des Strahls ist, um diesem ein vollständiges Umlenken in die entgegengesetzte Richtung zu gestatten, so wird $\cos \alpha = -1$ und der Stossdruck

$$P = 2 \frac{\gamma F v^2}{g},$$

also doppelt so gross, als der Druck gegen eine ebene Wand — oder viermal so gross als der hydrostatische Druck auf einen Mündungsdeckel.

Ein Strahl, der eine Kugelfläche von der erhabenen Seite her trifft, folgt der Kugelfläche nicht, sondern biegt sich bald von ihr ab. Es hängt hier von dem Verhältnisse zwischen der Strahldicke und dem Kugelhalbmesser ab, unter welchem Winkel α die Wassertheilchen die Kugelfläche verlassen. Wenn der Kugelhalbmesser sehr gross gegen die Breite des Strahls ist, biegt sich das Wasser von vornherein nahezu rechtwinklig um und verlässt die Kugelfläche in dieser Richtung; der Stossdruck ist dann fast ebenso gross, als der gegen eine ebene Wand.

Selbstverständlich wird auch der Stossdruck gegen eine ebene Fläche geringer, als nach Gl. (146), wenn die Ausdehnung dieser Fläche nicht hinreicht, um ein vollständiges Umbiegen der Bewegungsrichtung um einen rechten Winkel herbeizuführen. Auch in diesem Falle ist die allgemeine Gleichung (148) zur Anwendung zu bringen.

Bis jetzt war immer vorausgesetzt, dass die Fläche, auf die der Strahl trifft, festgehalten sei. Es macht aber offenbar nichts aus, wenn sich auch die Fläche selbst in derselben Richtung wie der Strahl oder in der entgegengesetzten bewegt. In jedem Falle ist dann unter v in den vorausgehenden Formeln die Relativgeschwindigkeit zwischen dem Strahle und der sich bewegenden Fläche zu verstehen. Wenn sich die Fläche mit derselben Geschwindigkeit vorwärts bewegt, wie

der Strahl, ist die Relativgeschwindigkeit und mit ihr auch der Stossdruck gleich Null. Bewegt sich die Fläche dem Strahle mit der Geschwindigkeit v' entgegen, so ist die Relativgeschwindigkeit gleich $v + v'$ und der Stossdruck wird entsprechend erhöht.

Schliesslich sei noch der Fall untersucht, dass ein Strahl schief auf eine ebene Wand auftrifft. Der Winkel, den die Strahlrichtung mit der Wand bildet, sei mit α bezeichnet. Die Geschwindigkeit v des Strahles kann dann in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine von der Grösse $v \sin \alpha$ rechtwinklig zur Wand und die andere von der Grösse $v \cos \alpha$ parallel zur Wand gerichtet ist. Auf die letzte kommt es, wenn von Reibungen des Wassers an der Wand abgesehen wird, nicht an. Man kann sich den Vorgang in der Weise vorstellen, dass die Wand selbst eine Bewegung in ihrer eigenen Ebene mit der Geschwindigkeit $v \cos \alpha$ entgegengesetzt der gleich grossen Bewegungscomponente des Strahls ausführt, während der Strahl mit der Geschwindigkeit $v \sin \alpha$ rechtwinklig auf sie auftrifft. An der Relativbewegung zwischen der Wand und dem Strahle, auf die es allein ankommt, wird dadurch nichts geändert. Wenn die Wand absolut glatt ist, so dass sie der Bewegung des Wassers längs ihrer Fläche keinen Reibungswiderstand entgegensetzt, macht die Bewegung, die sie in ihrer eigenen Ebene ausführt, offenbar nichts aus. Der Wasserstrahl breitet sich längs ihr ebenso aus, als wenn sie in Ruhe wäre und der Druck des Strahles ist rechtwinklig zu ihr gerichtet und so gross, wie es der Geschwindigkeit $v \sin \alpha$ entspricht. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass jetzt als Querschnittsfläche des Strahls nicht jene zu verstehen ist, die senkrecht zur thatsächlichen Geschwindigkeit v, sondern jene, die senkrecht zur Bewegungscomponente $v \sin \alpha$ gezogen ist. Bezeichnet man diese mit F' und die erste mit F, so ist $F' = \frac{F}{\sin \alpha}$. Setzt man auch noch $v \sin \alpha = v'$, so wird der Stossdruck nach Gl. (146)

$$P = \frac{\gamma F' v'^2}{g}$$

oder, wenn man die Werthe von F' und v' einführt,

$$P = \frac{\gamma F v^2}{g} \sin \alpha. \qquad (149)$$

Um diese Gleichung in nähere Beziehung mit Gl. (146) zu setzen, bezeichne ich jetzt noch den Stossdruck, den derselbe Strahl bei senkrechtem Auftreffen auf eine feste Wand ausüben würde, also den nach Gl. (146) berechneten Werth von P mit P'; dann ist nach Gleichung (149)

$$P = P' \sin \alpha. \qquad (150)$$

Der Stossdruck beim schiefen Auftreffen wird also aus dem bei senkrechtem Auftreffen einfach durch Multiplication mit dem Sinus des Neigungswinkels gefunden.

Auf die Reibung, die das Wasser beim schiefen Auftreffen thatsächlich an der festen Wand erfährt, ist bei diesen Betrachtungen keine Rücksicht genommen. Ihr Betrag wird wesentlich durch die Rauhigkeit der Wand bedingt und kann auch selbst näherungsweise nicht allgemein angegeben werden. Auch Versuche, die sich zu ihrer Schätzung verwenden liessen, liegen kaum vor. Jedenfalls gibt P in Gl. (149) oder (150) nur die Normalcomponente des thatsächlich auftretenden Stossdruckes an. Oft wird freilich auch nur nach dieser gefragt. Man thut aber gut, sich jederzeit daran zu erinnern, dass namentlich bei einer rauhen Wandfläche durch die Reibung auch eine Tangentialcomponente von merklicher Grösse übertragen werden kann.

Beim rechtwinkligen Stosse gegen eine feste Wand spielt übrigens die Reibung, obschon sie auch hier auftritt, niemals eine Rolle. Die Reibung fällt nämlich überall in die Bewegungsrichtung des Wassers längs der Wand und da sich das Wasser hier nach allen Seiten gleichmässig ausbreitet, heben sich die Reibungen an verschiedenen Stellen für die ganze Wand gegeneinander auf. Sie bewirken nur, dass die Geschwindigkeit, mit der das Wasser nachher der Wand entlang weiter strömt, kleiner wird, als v. Für den Stossdruck ist dies aber ohne Bedeutung.

§ 60. Die Reaction des Strahles.

Die Ausflussöffnung eines Gefässes sei zunächst durch ıen Mündungsdeckel geschlossen. Dann stehen die Druckäfte, die von der Gefässwand auf den Wasserinhalt überıgen werden, im Gleichgewichte mit dem Gewichte dieses asserkörpers. Dieses Gleichgewicht wird zerstört, wenn der ündungsdeckel entfernt wird. Zunächst schon deshalb, weil :zt die Druckkraft auf den Mündungsdeckel wegfällt. Im sten Augenblicke nach der Entfernung des Deckels ist dies r einzige Grund für die Störung des Gleichgewichts. Alle rher genannten Kräfte werden daher eine Resultirende erben, die dem Drucke auf den Mündungsdeckel gleich gross ıd entgegengesetzt gerichtet ist.

Sobald sich aber der Strahl vollständig ausgebildet hat, so nach Eintreten des stationären Zustandes, ist die Druckrtheilung innerhalb des Wasserkörpers und daher auch an n Wänden geändert. Je grösser die Geschwindigkeit georden ist, desto mehr sinkt überall der Druck. Die Resul:ende aus den Wandkräften und dem Wassergewichte ist .her nicht mehr dem hydroatischen Drucke auf den ündungsdeckel gleich und :tgegengesetzt gerichtet, son:rn sie nimmt einen anderen 'erth an, der auf verschienen Wegen ermittelt werden ınn.

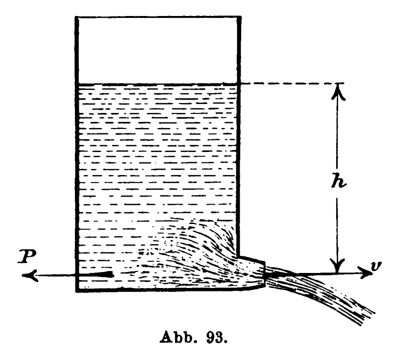


Abb. 93.

Man denke sich das in bb. 93 gezeichnete Gefäss ıch links hin mit einer nstanten Geschwindigkeit ;wegt, die gleich der Ausflussgeschwindigkeit v ist. Das ıstretende Wasser hat dann immer noch die Relativ;schwindigkeit v gegen das Gefäss; da sich dieses selbst mit ;r Geschwindigkeit v nach der entgegengesetzten Richtung

bewegt, ist aber die absolute Geschwindigkeit und mit ihr die kinetische Energie des austretenden Strahles gleich Null. Zugleich hat sich der Energieinhalt des Gefässes vermindert. Zunächst deshalb, weil in der Zeiteinheit eine Wassermenge Q vom Gewichte γQ um die Höhe h herabgesunken ist, womit eine Verminderung der potentiellen Energie vom Betrage $\gamma Q h$ verbunden ist. Ausserdem aber auch, weil diese Wassermenge so lange sie sich noch mit dem Gefässe bewegte, eine lebendige Kraft vom Betrage $\frac{\gamma Q}{2g} v^2$ besass. Nach dem Austritte aus dem Gefässe hat das Wasser beide Energiemengen abgegeben. Ein Theil davon wird darauf verwendet, die inneren Reibungen im strömenden Wasser zu überwinden. Dieser Antheil ist aber nur gering, wie schon daraus hervorgeht, dass der Geschwindigkeitscoefficient des ausströmenden Wassers nicht viel von der Einheit verschieden ist. Wir wollen daher zunächst ganz von ihm absehen, die Aufgabe also so behandeln, als wenn das Wasser eine vollkommene Flüssigkeit wäre. Dann ist auch

$$\frac{v^2}{2g} = h$$

und die beiden vorher angeführten Energiebestandtheile sind einander gleich; ihre Summe ist daher gleich

$$\frac{\gamma Q v^2}{g}.$$

Diese Energiegrösse kann, da Verluste ausgeschlossen wurden, nur noch zur Arbeitsleistung der Reactionskraft P des Strahles verwendet worden sein. Als Reaction des Strahles bezeichnet man nämlich die Resultirende aller auf das Gefäss vom Wasser übertragenen Druckkräfte nach Abzug des Wassergewichtes. Der Weg, auf dem die Kraft P in der Zeiteinheit wirkt, ist gleich v. Man hat daher die Gleichung

$$Pv = \frac{\gamma Q v^2}{g}$$

und hieraus

$$P = \frac{\gamma Q v}{g} = \gamma \frac{F v^2}{g} = 2 \gamma F h. \qquad (151)$$

Die Arbeitsleistung von P wird nach aussen abgegeben. Wir müssen uns nämlich, um die gleichförmige Geschwindigkeit v des Gefässes aufrecht zu halten, einen Widerstand von der Grösse P daran angebracht denken, der während der Bewegung überwunden wird. Wenn sich das Gefäss reibungsfrei und ohne jeden anderen Widerstand in horizontaler Richtung bewegen könnte, würde es unter dem Einflusse der Reactionskraft P eine beschleunigte Bewegung annehmen.

Man erkennt aus Gl. (151), dass die Reaction des Strahles ebenso gross ist, als der Druck, den der Strahl auf eine ebene Wand auszuüben vermöchte, oder doppelt so gross, als der hydrostatische Druck auf den Mündungsdeckel. Hierbei ist angenommen, dass eine Einschnürung des austretenden Strahles durch Verwendung einer passenden Ansatzröhre vermieden ist, so dass also F sowohl die Fläche der Mündung als die Querschnittsfläche des austretenden Strahles bezeichnet. Zugleich erkennt man aus den vorausgehenden Erörterungen, dass P wegen der auf die Ueberwindung der inneren Reibungen im strömenden Wasser zu verwendenden Energie in Wirklichkeit ein wenig kleiner als nach Gl. (151) ausfallen muss.

Ich habe der hier durchgeführten Ableitung von P den Vorzug gegeben, weil sie zugleich deutlich erkennen lässt, dass man bei passender Wahl der Geschwindigkeit des Gefässes fast den ganzen Energieinhalt, den das Wasser im Gefässe besass, zur Leistung von Nutzarbeit, nämlich zur Ueberwindung eines mit dem Gefässe in Verbindung stehenden Widerstandes, verwenden kann. Das ist auch noch bei anderen Anordnungen des Gefässes und der an ihm angebrachten Oeffnungen möglich, wenn nur dafür gesorgt wird, dass das aus dem bewegten Gefässe austretende Wasser die absolute Geschwindigkeit Null hat. Dieses Ziel strebt man bei den sogenannten Reactionsturbinen an.

Wenn das unten ausfliessende Wasser durch einen Zufluss von oben stets wieder ersetzt wird, muss freilich ein Theil und zwar die Hälfte der vorher berechneten Arbeitsleistung darauf verwendet werden, um dem neu zugeführten

'asser erst die Geschwindigkeit v des Gefässes zu verleihen; ir die nutzbare Arbeitsleistung steht dann nur die dem Geälle h entsprechende potentielle Energie zur Verfügung. Diese kann aber bis auf den zur Ueberwindung der Reibungen erforderlichen Bruchtheil vollständig gewonnen werden, wenn die Absolutgeschwindigkeit des austretenden Wassers immer noch gleich Null ist. Auch in diesem Falle wird übrigens unter der Reaction des Strahls der nach Gl. (151) berechnete Werth P verstanden; es kommt hier nur in Betracht, dass die Hälfte dieser Kraft auf die Beschleunigung des oben ohne merkliche Geschwindigkeit zugeführten Wassers verwendet werden muss, so dass für die Ueberwindung des Nutzwiderstandes nur die andere Hälfte zu Gebote steht.

Eine andere, gleichfalls sehr einfache Ableitung von Gl. (151) beruht auf dem Satze vom Antriebe und schliesst sich eng an die Untersuchung zu Anfang des vorigen Paragraphen an. Man lässt das Gefäss in Ruhe, beachtet, dass die ausströmende Wassermenge Q die Bewegungsgrösse $\frac{Q\gamma}{g}v$ erlangt und setzt diese gleich dem Zeitintegrale der Kräfte, die auf das Wasser vom Gefässe und durch die Schwere übertragen werden. Die Resultirende aus diesen ist wieder gleich P und das Zeitintegral ist ebenfalls gleich P, da P constant ist und während der Zeiteinheit einwirkt. Daraus folgt ebenfalls sofort Gl. (151).

§ 61. Der Stoss einer unbegrenzten Flüssigkeit gegen eine ebene Fläche.

In § 59 war angenommen worden, dass die feste Wan auf die das Wasser stösst, eine grosse Ausdehnung gegenüb der Querschnittsfläche des Strahls besitzen sollte. Hier w dagegen umgekehrt der Fall betrachtet, dass der Querschı des Strahls sehr gross gegenüber der Fläche ist, die sich an irgend einer Stelle entgegensetzt. Man denke sich eine ebene Platte in einen Fluss getaucht und sie an Stelle festgehalten. Dabei möge sie von den Quersch

umgrenzungen des Flussbetts hinreichend weit abstehen und diesen gegenüber klein genug sein, um keinen merklichen Stau zu erzeugen. Dann kommt es auf den Querschnitt des Flussbetts überhaupt nicht mehr an und man kann ihn sich unbegrenzt gross vorstellen.

Dieser Fall ist, wenn eine genaue Untersuchung verlangt wird, viel schwieriger zu erledigen, als der frühere. Sowohl hinter als vor der Platte bildet sich eine Ansammlung wenig oder fast gar nicht bewegten Wassers, ein sogenannter „Stauhügel“. Es macht hier übrigens nichts aus, ob die strömende Flüssigkeit Wasser oder Luft ist, denn sehr grosse Druck-, Volumen- und Temperaturunterschiede sind hier innerhalb der Luftmasse nicht zu erwarten, so lange die Geschwindigkeit nicht grösser, als etwa bei einem recht starken Winde ist. Grade auch für den Winddruck sind die Betrachtungen, um die es sich hier handelt, von erheblicher practischer Wichtigkeit, und hier lässt sich auch das Auftreten des „Stauhügels“ vor und hinter der Platte am bequemsten beobachten. Man braucht an diesen Stellen nur ein Licht aufzustellen, um sich davon zu überzeugen, dass die Geschwindigkeit dort stark vermindert ist.

Um den Stauhügel biegen sich die Stromlinien nach allen Seiten herum, um sich weiter hinten wieder zu vereinigen. Dabei wirken die vorüber strömenden Flüssigkeitsfäden nicht nur durch ihren Druck, sondern wesentlich auch durch Reibung auf die angrenzenden wenig bewegten Massen des Stauhügels. Auf diesen Umstand werde ich im vierten Bande dieser Vorlesungen noch zurückkommen.

Was eine einfache Untersuchung des ganzen Vorgangs besonders erschwert, ist namentlich der Umstand, dass man über die Aenderung der Bewegungsgrösse der vorbeiströmenden Flüssigkeit hier von vornherein gar nichts auszusagen vermag. Bei dem Stosse eines Strahls von begrenztem Querschnitte gegen eine unbegrenzte Wand war man in dieser Hinsicht in viel günstigerer Lage.

Um wenigstens zu einer ungefähren Schätzung zu ge-

langen, die bei der Deutung der Beobachtungsergebnisse, auf die man hier in erster Linie angewiesen ist, zu Grunde gelegt werden kann, bleibt in der That nichts anderes übrig, als einen Vergleich mit dem früheren Falle zu versuchen. Man bedenke, dass sich auch beim senkrechten Auftreffen eines begrenzten Strahles gegen eine unbegrenzte Wand in der Mitte der getroffenen Stelle ein Stauhügel ausbilden muss, und dass die Verhältnisse für diesen ähnlich liegen, wie in dem jetzt zu betrachtenden Falle. Es liegt demnach nahe, zu versuchen, ob sich der in § 59 für den Stossdruck P abgeleitete Werth auch in diesem verwandten Falle bewährt. Dabei werden wir an Stelle des Strahlquerschnitts hier die von der unbegrenzten strömenden Flüssigkeit senkrecht getroffene Fläche F einzuführen, ausserdem aber mit einem Coefficienten K zu multipliciren haben, dessen Werth aus Versuchen zu bestimmen ist, wodurch wir der Unsicherheit Rechnung tragen, mit der diese ganze Ableitung behaftet ist. Wir setzen also für den senkrechten Stoss auf eine ebene Fläche in Anlehnung an Gl. (146)

$$P = K \cdot \frac{\gamma F v^2}{g}. \tag{152}$$

Dieser Ansatz hat sich nun in der That im Ganzen besser bewährt, als nach der unsicheren Ableitung, auf der er beruht, erwartet werden könnte. Bei Wasser freilich schwanken die aus den Versuchen berechneten Werthe von K zwischen 0,93 und 1,5; es kommt hier nicht nur auf den Inhalt F, sondern auch auf die Form der getroffenen Fläche und wohl auch noch auf manche andere Umstände an, deren Einfluss aus den Versuchen nicht deutlich genug hervortritt. Erheblich besser ist aber die Uebereinstimmung für die Luft. Zuverlässige Messungen des Winddrucks liegen in Folge neuerer Arbeiten auf diesem Gebiete in ziemlich grosser Zahl vor und sie bestätigen, dass man zur Ermittelung des Winddruck genau genug $K = 1$ setzen kann. Unter den gewöhnliche Druck- und Temperaturverhältnissen an der Erdoberfläc

wiegt ein cbm Luft etwa 1,2 bis 1,3 kg; daher ist für den Winddruck

$$\frac{\gamma}{g} = 0{,}12 \text{ bis } 0{,}13 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}$$

zu setzen. Für den Winddruck auf 1 qm senkrecht getroffener Fläche kann man daher in kg rund

$$P = \frac{1}{8} v^2$$

annehmen, wenn v in m eingesetzt wird. — Wir sind damit zugleich von Neuem zu dem schon in § 8 erwähnten Ansatze für den Widerstand gelangt, den eine Flüssigkeit einem in ihr bewegten Körper entgegensetzt.

Auf wie unsicheren Füssen die Ableitung der Formel (152) aber immerhin steht, ergibt sich daraus, dass eine ihr nachgebildete Herleitung des Wind- oder Wasserdruckes beim schiefen Stosse zu ganz unrichtigen Ergebnissen führt. Nach den neueren Versuchen kann dies als zweifellos festgestellt angesehen werden.

Man kann hier zunächst so wie früher verfahren, also der ebenen Platte eine Geschwindigkeit senkrecht zur Strömungsrichtung der Flüssigkeit ertheilen. Die Relativbewegung zwischen der Platte und der Flüssigkeit entspricht dann einem schiefen Stosse. In § 59, wo die Platte eine grosse Ausdehnung gegenüber dem Querschnitte des Strahles hatte, konnte bei Vernachlässigung der Reibung zwischen Flüssigkeit und Platte die Bewegung der Platte in ihrer eigenen Ebene keinen Einfluss auf den senkrecht zur Platte gerichteten Stossdruck ausüben. Hier ist dies aber anders; sobald man der Platte eine Bewegung senkrecht zur Stromrichtung ertheilt, werden die Stromlinien der sich um die Platte herumbiegenden Stromfäden fortwährend geändert. Man erkennt daraus, dass auch ganz abgesehen von der Wirkung der Reibungen die Normalcomponente des Stossdruckes durch die Eigenbewegung der Platte erheblich geändert werden kann.

Trotzdem war es früher allgemein üblich, von dieser Aenderung abzusehen und den normal zur Platte gerichteten Stossdruck ebenso gross anzunehmen, als wenn die Platte

Eigenbewegung senkrecht zur Stromrichtung hätte. Be-
et also v die ganze Geschwindigkeit des schief zur Platte
effenden Flüssigkeitsstromes und α den Winkel, den die
mrichtung mit der Ebene der Platte bildet, also $v \sin \alpha$
Normalcomponente der Geschwindigkeit und $v \cos \alpha$ die
ngentialcomponente, die auf Rechnung einer Eigenbewegung
er Platte gesetzt werden kann, so nahm man für den Stoss-
ruck P' den Werth

$$P' = K \cdot \frac{\gamma F (v \sin \alpha)^2}{g} = P \sin^2 \alpha \qquad (153)$$

an. Hierbei bedeutet wieder P den Stossdruck, den die Platte erfahren würde, wenn sie senkrecht zur Stromrichtung aufgestellt wäre.

Wie ich schon erwähnte, steht diese früher ganz allgemein und auch jetzt noch zuweilen gebrauchte Formel durchaus nicht in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der neueren Versuche über den Winddruck, die namentlich von Lössl angestellt wurden. Besonders für einen kleinen Werth des Winkels α liefert sie falsche, nämlich zu kleine Werthe. Lössl fand, dass sich seine Versuchsergebnisse durch die empirische Formel

$$P' = P \sin \alpha \qquad (154)$$

gut darstellen liessen. Im Wesentlichen bestätigt werden die Versuche Lössl's durch jene von Langley.

Auf Grund einer Untersuchung über die Gestalt der Stromlinien beim schiefen Stosse einer unbegrenzten Flüssigkeitsmasse gegen eine ebene Fläche hat Rayleigh die Formel

$$P' = P \frac{(4 + \pi) \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \qquad (155)$$

theoretisch hergeleitet. Sie gibt für den schiefen Stoss no
grössere Werthe als die Lössl'sche Formel und steht
den Versuchsergebnissen von Langley noch besser in Ue
einstimmung als diese. Jedenfalls muss es aber als zwei
nachgewiesen betrachtet werden, dass die alte Formel
kleine Werthe liefert. Zunächst bezieht sich dies
Nachweis auf den Winddruck; es kann abe

bezweifelt werden, dass sich für den Wasserdruck bei genauerer Untersuchung ähnliche Ergebnisse herausstellen würden.

Beim senkrechten Stosse auf eine hohle Fläche ändert sich an P kaum etwas; der vorher erwähnte Stauhügel bildet sich über der hohlen Fläche ungefähr ebenso aus, als wenn die Fläche eben wäre. Auf eine gekrümmte Fläche, die dem Strome ihre erhabene Seite zukehrt, wirkt aber ein kleinerer Druck, da die Flüssigkeitsmassen besser zur Seite abfliessen können. Gewöhnlich ermittelt man ihn näherungsweise dadurch, dass man für jedes einzelne Flächenelement die Formel für den schiefen Stoss zur Anwendung bringt und die Resultirende aus den in dieser Weise berechneten Druckkräften ermittelt. Sehr zuverlässig ist aber dieses Verfahren keineswegs. Wer einen möglichst genauen Werth von P in einem gegebenen Falle braucht, darf sich bei dem heutigen Stande unserer Kenntnisse auf diesem Gebiete auf keine theoretisch abgeleitete Näherungsformel verlassen, sondern muss entweder selbst Versuche anstellen oder sich auf Versuche stützen, die unter möglichst ähnlichen Bedingungen durchgeführt wurden. In neuerer Zeit hat namentlich das Bestreben, ein lenkbares Luftschiff zu construiren, die Veranlassung zu manchen recht schätzenswerthen Versuchen gegeben. Zu einer besseren Fassung der Theorie haben diese aber, abgesehen von den Formeln (154) und (155), die auf diesem Wege gefunden oder bestätigt wurden, bisher noch nicht geführt. Andererseits liegen auch für den Widerstand, den ein Schiff bei der Fahrt durch das Wasser erfährt, zahlreiche Versuchsergebnisse vor. Zur näheren Erörterung in einem Lehrbuche der Mechanik eignen sich aber alle diese Versuchsresultate nicht; Erfahrungswerthe dieser Art können nur im Zusammenhange mit der Constructionslehre mit Erfolg besprochen werden.

Bisher war immer von dem Falle die Rede, dass der dem Stosse der Flüssigkeit ausgesetzte Körper festgehalten war. Führt er dagegen selbst irgend eine Bewegung aus, so kommt es auf die Relativbewegung zwischen ihm und der strömenden Flüssigkeit an. Mit dem Einsetzen der Relativ-

geschwindigkeit in die vorausgehenden Formeln ist der Fall auf den früheren zurückgeführt.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass man bei vielen Aufgaben über den schiefen Stoss nicht nach der Normalcomponente, sondern nach der in der Richtung der Strömung selbst genommenen Componente des Stossdruckes fragt. Hierbei tritt eine neue Unsicherheit, namentlich beim Stosse unter sehr schiefem Winkel, dadurch auf, dass man über die durch die Reibung der Flüssigkeit längs der getroffenen Fläche verursachte Tangentialcomponente des Stossdruckes nichts weiss. Gewöhnlich begnügt man sich damit, diese zu vernachlässigen; man nimmt also an, dass der Stossdruck nur rechtwinklig zur getroffenen Fläche wirke. Unter dieser Annahme findet man die in die Richtung der Strömung fallende Componente aus P' selbst durch Multiplication mit $\sin\alpha$. Bezeichnet man die genannte Componente mit P'', so hat man nach der alten, aber als falsch erkannten Formel (153) für P'

$$P'' = P \sin^3\alpha,$$

und nach der wenigstens für den Winddruck als in der Regel hinreichend genau richtig befundenen Lössl'schen Formel

$$P'' = P \sin^2\alpha. \qquad (156)$$

Man muss sich übrigens hüten, die Formel (156) für die Componente P'' mit der alten Formel (153) für den Normaldruck P' zu verwechseln.

§ 62. Bewegung des Wassers in Flüssen und Canälen.

Die Bewegung des Wassers in einem Flusse wird durch das Gefäll unterhalten. Dabei kommt es aber nicht auf das Gefäll des Flussbettes, sondern auf das Gefäll des Wasserspiegels an. Beide können sich freilich auf sehr lange Strecken hin im Durchschnitte nicht viel von einander unterscheiden.

Durch die stetige Spiegelsenkung längs des Flusslaufes wird die potentielle Energie des von grösserer Höhe herab-

sinkenden Wassers ausgelöst und zur Ueberwindung der Reibungen am Umfange des Bettquerschnittes und der inneren Reibungen der mit verschiedenen Geschwindigkeiten längs einander hinfliessenden Stromfäden verbraucht. Die Erscheinungen sind oft so verwickelt, dass sie jeder genaueren theoretischen Behandlung spotten. So kann bei einem unregelmässig gestalteten Flusslaufe die durchschnittliche Geschwindigkeit in nahe aufeinander folgenden Querschnitten stark wechseln, womit noch die Differenz der lebendigen Kräfte neben dem Gefälle ins Spiel kommt. Ausserdem kommt eine sehr verschiedenartige Vertheilung der Geschwindigkeiten über den Querschnitt vor, die nicht nur von der Gestalt des Querschnittes, sondern auch von den Krümmungen abhängt, die der Flusslauf im Grundrisse ausführt.

Für den Wasserbau ist die Kenntniss der Geschwindigkeitsvertheilung über den Querschnitt, namentlich aber der durchschnittlichen Geschwindigkeit für irgend einen Querschnitt von grosser Wichtigkeit. Aus ihr folgt durch Multiplication mit der Querschnittsfläche die Wassermenge, die der Fluss in der Zeiteinheit nach abwärts führt. Zu deren Ermittelung kann man sich eine möglichst regelmässig gestaltete Flussstrecke aussuchen. Die Aufgabe wird daher im Wesentlichen darauf zurückgeführt, die durchschnittliche Geschwindigkeit v in einem graden Flusslaufe von regelmässig gestaltetem Querschnitte und bei gleichförmiger Bewegung des Wassers zu ermitteln. Practisch kann die Aufgabe zunächst dadurch gelöst werden, dass man die Geschwindigkeit an einer grossen Zahl verschiedener Punkte des Querschnitts mit Hülfe geeigneter Instrumente unmittelbar misst und die durchschnittliche Geschwindigkeit daraus berechnet. Solche Messungen werden fortgesetzt an allen wichtigeren Strömen, die in gehöriger Weise überwacht werden, in grosser Zahl ausgeführt. Sie lehren im Allgemeinen, dass die Geschwindigkeit beim regelmässig gestalteten Flusslaufe am grössten in der Mitte zwischen beiden Ufern und etwas unter dem Wasserspiegel ist. Von da aus nimmt sie nach unten und nach den Seiten hin all-

lich ab. Denkt man sich im Stromstriche eine Lothrechte
ogen und in jedem Punkte die zugehörige Geschwindigkeit
irgend einem Maassstabe rechtwinklig zu ihr abgetragen,
erhält man eine Curve, die als eine Parabel mit horizon-
ler Axe betrachtet werden kann; der Scheitel der Parabel
iegt ein wenig unterhalb des Wasserspiegels.

Diese unmittelbare Messung der Geschwindigkeiten liefert die zuverlässigsten Resultate für die Wassermenge, die der Fluss im gegebenen Augenblicke führt. Sie ist aber nicht immer anwendbar, namentlich dann nicht, wenn man vorher schon wissen muss, wie viel Wasser ein neu anzulegender Wasserlauf von gegebenem Querschnitte bei gegebenem Gefälle abzuführen vermag. Man ist dann auf die Benutzung einer Formel für die Geschwindigkeit v angewiesen, bei deren Aufstellung jedoch die zahlreichen Messungsergebnisse, über die man verfügt, verwendet werden können.

Zunächst ist hervorzuheben, dass zur Erzielung einer gegebenen durchschnittlichen Geschwindigkeit v ein um so kleineres Gefäll erforderlich ist, je grösser bei sonst ähnlicher Gestalt der Querschnitt ist. So erfordert ein kleiner Bach für die gleiche Geschwindigkeit ein grösseres Gefäll, als ein grosser Strom. Aber auch bei gegebenem Flächeninhalte des Querschnittes kommt es noch auf dessen Gestalt an, denn der Widerstand, den das Bett der Wasserbewegung entgegensetzt, wächst mit dem Umfange der benetzten Fläche. Man denke sich den Flächeninhalt des Querschnitts durch den Umfang, mit dem er gegen das Flussbett angrenzt, dividirt; man erhält dann eine Länge r, die als der Profilradius oder auch als die hydraulische Tiefe des Querschnitts bezeichnet wird. Die letzte Bezeichnung rührt davon her, dass r bei einem im Vergleiche zur Tiefe sehr breiten Flusslaufe nahezu gleich der Tiefe ist. Querschnitte von gleichem Profilradius r können als gleichwerthig angesehen werden; d. h. bei gleichem Gefälle ist die durchschnittliche Geschwindigkeit für beide gleich gross. Dagegen muss, um dieselbe Geschwindigkeit zu erzielen, das Gefäll in demselben Verhältnisse grösser genommen werden,

in dem der Profilradius kleiner ist. Dies steht zunächst in Uebereinstimmung mit der Erfahrung; es lässt sich aber auch leicht voraussehen, wenn man bedenkt, dass bei zwei ähnlichen Querschnitten, deren Längen sich wie 1 : 2 verhalten, die Flächeninhalte das Verhältniss 1 : 4, die Umfänge dagegen das Verhältniss 1 : 2 haben. Da die Wasserbewegung in beiden Fällen die gleiche sein soll, wird in der Nähe des Umfangs beim grösseren Querschnitte doppelt so viel Energie zur Ueberwindung der Reibungen verbraucht, als beim kleineren. Zugleich steht aber die 4-fache Wassermenge zur Verfügung, und diese braucht daher, um die doppelte Energiemenge zu liefern, nur um die Hälfte der Höhe herabzusinken.

Das Gefäll des Flusslaufes sei mit s bezeichnet; wir denken es uns als Verhältniss der Spiegelsenkung zur zugehörigen Länge der Flussstrecke ausgedrückt. Nach dem, was vorher bemerkt wurde, ist die Geschwindigkeit in erster Linie von dem Producte rs abhängig, wobei es gleichgültig ist, wie sich dieser Werth auf die beiden Factoren vertheilt. Es fragt sich jetzt, was für eine Function v von rs sein wird. Auf Grund allgemein gültiger mechanischer Gesetze lässt sich hierüber kein Aufschluss gewinnen; man kann höchstens zu einer Vermuthung darüber gelangen, deren Berechtigung sich erst durch einen Vergleich mit der Erfahrung herausstellen kann.

Man bedenke, dass bei gegebenem Querschnitte, aber veränderlichem Gefälle das Product rs der Arbeit proportional ist, die von der Schwere geleistet und zur Ueberwindung der inneren Reibungen verbraucht wird. Der dazu erforderliche Arbeitsaufwand hängt aber zugleich von der Geschwindigkeit v ab; die Fragestellung kommt daher darauf hinaus, ob die in Wärme umgewandelte mechanische Energie der ersten oder der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist, oder welches Gesetz etwa sonst zwischen beiden Grössen besteht. Manche Erwägungen scheinen für die Proportionalität mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit zu sprechen, so namentlich der Umstand, dass die innere Reibung der Flüssig-

keiten den Unterschieden zwischen den Geschwindigkeiten benachbarter Stromfäden proportional zu sein pflegt. Andererseits zeigt sich aber, dass die Energieverluste bei Wasserbewegungen meist ungefähr in gleichen Bruchtheilen der ursprünglich vorhandenen Energie ausgedrückt werden können, dass sie also dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sind. Es verhält sich damit ähnlich wie mit dem Stosse unelastischer Körper, bei dem ebenfalls der Energieverlust proportional dem Quadrate der Relativgeschwindigkeit ist, mit der beide Körper aufeinander treffen. In der That wird daher auch häufig zur Begründung der Arbeitsverluste bei der Wasserbewegung unmittelbar von den Stossgesetzen Gebrauch gemacht. Damit kann ich mich indessen nicht befreunden; es wird durch ein solches Vorgehen leicht der Anschein erweckt, als wenn es sich hierbei wirklich um eine streng berechtigte Ableitung aus allgemein gültigen Grundgesetzen handelte, während doch die Verhältnisse in beiden Fällen so vollkommen verschieden liegen, dass die ganze Betrachtung nur den Werth eines ungefähren Vergleichs in Anspruch nehmen kann.

Die Erfahrung lehrt indessen, dass die zur Ueberwindung der Reibungen erforderlichen Arbeitsgrössen unter sonst gleichen Umständen in der That wenigstens ungefähr dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional gesetzt werden können. Hiernach ist v selbst proportional mit der Quadratwurzel aus rs anzunehmen, also

$$v = k\sqrt{rs} \tag{157}$$

zu setzen. Der Factor k hat die Dimension $L^{\frac{1}{2}}T^{-1}$ und kann nur aus Versuchen entnommen werden. Dabei kommt natü lich auch die Rauhigkeit des Bettes in Frage. Unter gewöh lichen Umständen wird nach Eytelwein rund $k = 50\,\mathrm{m}^{\frac{1}{2}}$ sec gewählt. Die Genauigkeit, die man bei Annahme dieses Du schnittswerthes mit Gl. (157) erzielt, lässt indessen oft zu wünschen übrig. Man hat daher viele empirische Fo aufgestellt, nach denen der Werth von k für den ein Fall genauer bestimmt werden soll. Namentlich hat si

eingehenderer Untersuchung auch herausgestellt, dass die Proportionalität zwischen den Arbeitsverlusten und dem Quadrate der Geschwindigkeit nur ungenau erfüllt ist und dass Gl. (157) daher den Zusammenhang zwischen v und s nicht richtig wiedergibt. Man behält indessen Gl. (157) gewöhnlich trotzdem bei, setzt aber dabei k nicht mehr als unabhängig von der Geschwindigkeit voraus, sondern wählt für jedes v einen anderen Werth von k. So wird z. B. empfohlen, für die Geschwindigkeiten

$$v = 0{,}1, \quad 0{,}5, \quad 1{,}0, \quad 2{,}0, \quad 3{,}0 \ \mathrm{m} \cdot \mathrm{sec}^{-1};$$

$$k = 36{,}4, \quad 50{,}1, \quad 53{,}2, \quad 54{,}9, \quad 55{,}9 \ \mathrm{m}^{\frac{1}{2}} \mathrm{sec}^{-1}$$

zu wählen. Andere empirische Formeln lassen k auch vom Profilradius abhängen und führen Coefficienten ein, die von der Rauhigkeit des Bettes abhängen. Die ausführlichere Besprechung dieser Geschwindigkeitsformeln wird aber hier, wie in anderen Fällen, am besten der Lehre vom Wasserbau überlassen.

Auf die Bewegung des Wassers in Rohrleitungen, die mit der vorhergehenden eng verwandt ist, komme ich übrigens im vierten Bande nochmals zurück.

§ 63. Die Staucurve.

Hier sei nur der folgende, eng umschriebene Fall behandelt. Ein grader Wasserlauf hat einen rechteckigen Querschnitt, dessen Breite sehr gross gegenüber der Tiefe ist, so dass der Profilradius r gleich der Tiefe gesetzt werden kann. Zunächst ist die Tiefe überall gleich gross und die Neigung der Sohle daher ebenso gross, wie die des Wasserspiegels, d. h. gleich s. Dann wird an irgend einer Stelle ein Wehr eingebaut, wodurch ein Stau erzeugt wird; es handelt sich um die Ermittelung des Staues in beliebigen Abständen oberhalb des Wehrs. Die dadurch im Längsprofil des Flusslaufs gegebene Oberflächenform des Wasserspiegels heisst die Staucurve. Angenommen wird ferner, dass es genügt, den Coefficienten k in Gl. (157) der ganzen Länge der Staucurve nach

tz der vorkommenden Geschwindigkeitsunterschiede als con-
nt anzusehen.

In Abb. 94 ist ein Längsschnitt angegeben, und zwar sind, wie es in solchen Fällen gewöhnlich geschieht, die horizontalen Entfernungen in viel kleinerem Maassstabe aufgetragen, als die Höhe. Das in Wirklichkeit nur sehr unmerkliche Gefäll des Flusslaufs erscheint daher in der Abbildung durch eine stark geneigte Linie vertreten. Die Tiefe vor dem Wehreinbau sei mit t, die nachher zur Abscisse x gehörige Tiefe mit y bezeichnet. Der Stau an der Stelle x ist daher $y - t$ und die Ordinate z der Staucure ist gleich $y + sx$. Es wird sich also darum handeln, entweder y als Function von x oder, was auf dasselbe hinauskommt, x als Function von y darzustellen.

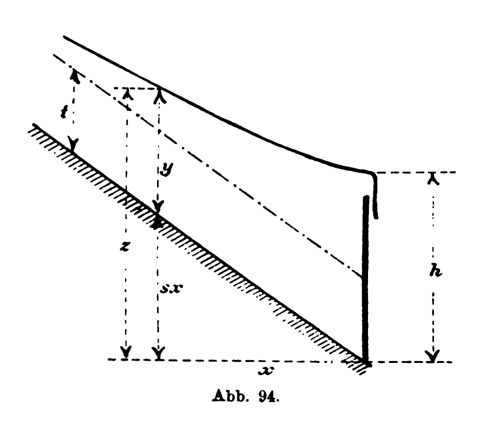


Abb. 94.

Wir denken uns einen Querschnitt bei x und einen zweiten im Abstande $x + dx$ vom Wehre gelegt und untersuchen die Bewegung des Wassers, das vom Querschnitte $x + dx$ zum Querschnitte x hinabfliesst. Zunächst ist das Gefäll an dieser Stelle anzugeben. Vor dem Stau war das Gefäll für d Strecke dx gleich sdx; jetzt hat es sich zu $sdx + dy$ ändert. Es ist offenbar kleiner geworden, denn das Differ tial dy, das zu einem positiven dx gehört, ist ohne Zw negativ, da der Stau mit der Entfernung vom Wehre abni Ich lasse indessen dy mit dem positiven Vorzeichen st die Rechnung selbst muss uns dann zeigen, dass das in Weise eingeführte dy negativ ausfällt.

Das auf die Längeneinheit bezogene Gefäll folgt Division mit dx, also zu

$$s + \frac{dy}{dx}.$$

Dieser Werth kann aber nicht ohne Weiteres an Stelle von s in Gl. (157) eingeführt werden; man muss vielmehr beachten, dass sich auch die lebendige Kraft des Wassers ändert, während es die Strecke dx durchfliesst.

Durch jeden Querschnitt fliesst dieselbe Wassermenge Q und man hat, wenn b die Breite des Querschnitts angibt,

$$Q = vyb,$$

woraus für v folgt

$$v = \frac{Q}{by}.$$

Die lebendige Kraft, mit der die Wassermasse $\frac{\gamma Q}{g}$ den Querschnitt x durchfliesst, ist daher

$$\frac{\gamma Q}{2g} \cdot \frac{Q^2}{b^2 y^2}.$$

Den Querschnitt $x + dx$ durchfloss dieselbe Masse mit einer etwas grösseren Geschwindigkeit. Der zugehörige Unterschied in der lebendigen Kraft wird durch Differentiation des vorausgehenden Ausdrucks nach x erhalten; er ist also gleich

$$-\frac{\gamma Q}{g} \cdot \frac{Q^2}{b^2 y^3} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx.$$

Da dy an sich negativ ist, stellt dieser Ausdruck in Wirklichkeit einen positiven Werth dar. Dieser Betrag an lebendiger Kraft vereinigt sich mit der durch das Gefäll ausgelösten potentiellen Energie der Schwere, die für dieselbe Wassermasse und dasselbe dx gleich

$$\gamma Q \left(s + \frac{dy}{dx}\right) dx$$

ist. Im Ganzen steht daher zur Ueberwindung der Bewegungswiderstände die Energiegrösse

$$\gamma Q \left(s + \frac{dy}{dx} - \frac{Q^2}{g b^2 y^3} \frac{dy}{dx}\right) dx$$

zur Verfügung. Diese ist ebenso gross, als wenn bei gleich-

förmiger Wasserbewegung das Gefäll an Stelle von $s + \frac{dy}{dx}$ den in der Klammer enthaltenen Werth angenommen hätte. Diesen so ergänzten Werth haben wir nun an Stelle von s in Gl. (157) einzuführen. Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$v^2 = k^2 r s,$$

beachten, dass r hier gleich y gesetzt werden kann und führen den an die Stelle von s tretenden Werth ein, so erhalten wir

$$v^2 = \frac{Q^2}{b^2 y^2} = k^2 y \left(s + \frac{dy}{dx} - \frac{Q^2}{g b^2 y^3} \frac{dy}{dx}\right).$$

In dieser Gleichung ist die Wassertiefe y die einzige Unbekannte und sie kann daher aus ihr ermittelt werden, wobei aber, weil von y auch der Differentialquotient vorkommt, zunächst eine Integration vorgenommen werden muss. Nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, liefert die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q^2 - k^2 b^2 y^3 s}{k^2 \left(b^2 y^3 - \frac{Q^2}{g}\right)}. \tag{158}$$

Um die Integration ausführen zu können, ordnen wir so, dass auf der einen Seite nur Glieder in y, auf der anderen nur dx vorkommt, also

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{y^3 - \frac{Q^2}{b^2 g}}{y^3 - \frac{Q^2}{b^2 k^2 s}} dy = - dx.$$

Wenn beide Differentialausdrücke einander gleich sein sollen, können sich die zugehörigen Stammgrössen nur um eine Constante von einander unterscheiden. Die Integration kann aber nach bekannten Methoden ausgeführt werden. Allgemein ist

$$\int \frac{y^3 - m^3}{y^3 - n^3} dy = y + \frac{n^3 - m^3}{3n^2} \left\{ \lg (y - n) - \frac{1}{2} \lg (y^2 + ny + n^2) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2y + n}{n\sqrt{3}} \right\}$$

eine Gleichung, von deren Richtigkeit man sich durch Ausführung der Differentiation des auf der rechten Seite stehenden Ausdrucks leicht überzeugt. Auf die vorausgehende Gleichung lässt sich dieses Resultat sofort übertragen, wenn man zur Abkürzung unter m und n die Werthe

$$m = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}}; \quad n = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 k^2 s}}$$

versteht. Man hat dann

$$y + \frac{n^3 - m^3}{3n^2}\left\{\lg \frac{y-n}{\sqrt{y^2+ny+n^2}} - \sqrt{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2y+n}{n\sqrt{3}}\right\} = C - sx,$$

worin nun C die zunächst unbestimmte Integrationsconstante bezeichnet. Zu ihrer Ermittelung in einem gegebenen Falle dient indessen die Bedingung, dass y für $x = 0$, also der Stau am Wehre selbst, jedenfalls bekannt sein muss, um die Staucurve festzulegen. Bezeichnen wir den Anfangswerth von y mit h, so wird

$$C = h + \frac{n^3 - m^3}{3n^2}\left\{\lg \frac{h-n}{\sqrt{h^2+nh+n^2}} - \sqrt{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2h+n}{n\sqrt{3}}\right\}$$

und nachdem man diesen Werth in die vorige Gleichung eingeführt hat, erhält man

$$y - h + \frac{n^3 - m^3}{3n^2}\left\{\lg \frac{(y-n)\sqrt{h^2+nh+n^2}}{(h-n)\sqrt{y^2+ny+n^2}} + \sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{2h+n}{n\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{2y+n}{n\sqrt{3}}\right)\right\} = -sx, \quad (159)$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Es ist nämlich mit Hülfe dieser Gleichung sofort möglich, die Stauweite x zu berechnen, bis zu der sich der Stau in der Höhe y erstreckt.

Von den zur Abkürzung eingeführten Werthen m und n hat übrigens n eine sehr einfache Bedeutung. Vor Herstellung des Staues floss nämlich dieselbe Wassermenge Q bei der Wassertiefe t und dem Gefälle s gleichförmig ab. Für die Geschwindigkeit v, mit der diese Bewegung erfolgte, hat man nach Gl. (157)

$$v = k\sqrt{ts},$$

woraus sich die Wassermenge Q berechnet zu

$$Q = btv = btk\sqrt{ts}.$$

Löst man diese Gleichung nach t auf, so erhält man

$$t = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 k^2 s}},$$

d. h. die vorher eingeführte Grösse n ist nichts anderes als die Wassertiefe vor Herstellung des Staues.

Setzt man in Gl. (159) $y = n$ oder $= t$, so wird $x = \infty$, d. h. der Einfluss des Staues verliert sich erst in sehr grosser Ferne vollständig. Wenn man die Stauweite nach Gl. (159) berechnen will, muss man daher zuvor eine bestimmte Annahme darüber machen, welchen Stau $y - n$, also welche Erhebung des angestauten Wasserspiegels gegenüber dem ursprünglichen Wasserspiegel vor Herstellung des Staues man als unbeachtlich ansehen will.

Auch die andere Constante m in den vorausgehenden Formeln lässt sich anstatt in der Wassermenge Q in der ursprünglichen Tiefe t ausdrücken. Man findet dann

$$m = t\sqrt[3]{\frac{k^2 s}{g}}.$$

Mit $k = 50\, m^{\frac{1}{2}} \sec^{-1}$ wird $\frac{k^2}{g}$ rund gleich 250. Wenn das Gefäll s gerade den Werth $\frac{1}{250}$ hätte, wäre auch $m = t$. Gewöhnlich ist das Gefäll kleiner und damit wird auch m kleiner, als die ursprüngliche Wassertiefe, d. h. kleiner als n. Für den besonderen Fall $m = t$ oder $= n$ vereinfacht sich übrigens Gl. (159) erheblich. Der Factor vor der Klammer auf der linken Seite wird zu Null und die Gleichung geht über in

$$y + sx = h.$$

Wie aus Abb. 94 hervorgeht, ist $y + sx$ die Ordinate z der Staucurve und wir sehen, dass diese Curve in dem besonderen Falle $s = \frac{1}{250}$ in eine horizontale Grade übergeht. Wenn

das Gefäll noch grösser als ungefähr $\frac{1}{250}$ und hiermit m grösser als n oder t wird, treten eigenthümliche Unregelmässigkeiten in der Staucurve, nämlich der zuerst von Bidone beobachtete sogenannte Wassersprung auf. Man erkennt dies am einfachsten aus Gl. (158)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q^2 - k^2 b^2 y^3 s}{k^2 \left(b^2 y^3 - \frac{Q^2}{g}\right)}.$$

Der Werth des Differentialquotienten wird nämlich unendlich gross, d. h. die Staucurve hat eine senkrechte Tangente, wenn der Nenner dieses Ausdrucks zu Null wird. Die Bedingung dafür ist

$$b^2 y^3 = \frac{Q^2}{g} \quad \text{oder} \quad y = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} = m.$$

Denn in der That stimmt der für y ermittelte Ausdruck mit jenem überein, der früher mit m bezeichnet wurde.

Der Werth $y = m$ ist in der Staucurve nur möglich, wenn m grösser ist als die ursprüngliche Wassertiefe. Bei den gewöhnlich vorkommenden kleineren Gefällen kann also ein Wassersprung, d. h. ein plötzliches, senkrechtes Ansteigen der Staucurve an keiner Stelle vorkommen. Anders ist es aber bei den starken Gefällen, für die beim Anstauen ein Wassersprung eintreten muss.

Durch Einführung der Werthe m und n, deren physikalische Bedeutung inzwischen erkannt wurde, in Gleichung (158) lässt sich diese übrigens auf die übersichtlichere Form

$$\frac{dy}{dx} = -s \frac{y^3 - n^3}{y^3 - m^3}$$

bringen. So lange das Gefäll den vorher ermittelten kritischen Werth nicht übersteigt, so lange also m kleiner als n ist, bleibt $\frac{dy}{dx}$ in Uebereinstimmung mit einer darüber vorher schon gemachten Bemerkung immer negativ und dem Absolutwerthe nach kleiner als s. Mit Einführung der Ordinate z der Staucurve, also mit

$$z = y + sx,$$

geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{dz}{dx} = s \cdot \frac{n^3 - m^3}{y^3 - m^3}$$

und dieser Differentialquotient, der das Gefäll der Staucurve an irgend einer Stelle angibt, bleibt, so lange m kleiner als n ist, immer positiv. Er wird um so kleiner, je grösser y ist, am kleinsten also in unmittelbarer Nachbarschaft des Wehrs, wo er den Werth

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = s\frac{n^3 - m^3}{h^3 - m^3}$$

annimmt.

Schliesslich sei noch ein Fall erörtert, der mit dem vorigen eng verwandt ist, obschon von einem Staue bei ihm nicht die Rede sein kann. Ein Canal, der im Uebrigen den früheren Voraussetzungen entspricht, sei auf eine lange Strecke ohne jedes Bodengefäll ausgeführt, so dass s für ihn gleich Null ist. Eine Wasserbewegung kann dann in ihm nur dadurch zu Stande kommen, dass sich der Spiegel fortwährend senkt, so dass die Wassertiefe nach abwärts immer mehr abnimmt, womit zugleich der constanten Durchflussmenge wegen die Geschwindigkeit wachsen muss.

Wir können hier zur Ermittelung der Gestalt des Wasserspiegels die vorausgegangenen Entwickelungen im Wesentlichen ebenfalls zu Grunde legen. Man denke sich nur in Abb. 94 unter h die gegebene Tiefe des Canals an seinem unteren Ende, wo er in ein grosses Wasserbecken ausmünden möge und setze $s = 0$. Die Betrachtungen, durch die wir zu Gl. (158) geführt wurden, bleiben mit $s = 0$ ohne weitere Aenderung auch hier gültig. Dass jetzt $\frac{dy}{dx}$ positiv ausfallen muss, kommt zunächst nicht weiter in Betracht, die Rechnung muss dies vielmehr von selbst lehren. Mit $s = 0$ vereinfacht sich Gl. (158) zu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q^2}{k^2\left(b^2y^3 - \frac{Q^2}{g}\right)} = \frac{p^3}{y^3 - m^3},$$

wenn zur Abkürzung

$$p = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{k^2 b^2}} \quad \text{und} \quad m = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}}$$

wie vorher gesetzt wird. Die Benutzung der Hülfsgrösse n oder t hat hier natürlich keinen Sinn, da der Canal ohne Bodengefäll auch bei noch so grosser Wassertiefe keine Durchflussmenge Q bei gleichförmiger Bewegung zu liefern vermag. Um die Gleichung zu integriren, setzen wir zunächst so wie früher

$$dy\,(y^3 - m^3) = p^3 dx$$

und erhalten daraus durch Integration

$$\frac{y^4}{4} - m^3 y = C + p^3 x.$$

Für $x = 0$ nimmt y den gegebenen Werth h an. Daraus bestimmt sich die Integrationsconstante C und nach Einsetzen ihres Werthes geht die Gleichung für die Curve, der der Wasserspiegel folgt, über in

$$\frac{y^4 - h^4}{4} - m^3 (y - h) = p^3 x.$$

Wenn y auch am oberen Ende des Canales, wo er von einem anderen Wasserbecken aus gespeist werden möge, gegeben ist und wenn die Tiefe des Canals an dieser Stelle mit H, die Länge des Canals mit l bezeichnet wird, folgt aus dieser Gleichung

$$\frac{H^4 - h^4}{4} - m^3 (H - h) = p^3 l.$$

Das Verhältniss von m und p kann von vornherein als bekannt angesehen werden. Man hat nämlich

$$\frac{m^3}{p^3} = \frac{Q^2}{b^2 g} : \frac{Q^2}{k^2 b^2} = \frac{k^2}{g},$$

also, wenn $k = 50$ gesetzt wird, ungefähr $m^3 = 250 p^3$. Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so kann sie nach der Unbekannten m^3 oder p^3 aufgelöst werden. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von m^3 oder p^3 folgt aber dann auch die

Wassermenge Q, die der Canal unter den gegebenen Umständen abzuführen vermag.

Aehnliche Rechnungen können natürlich auch für die ungleichförmige Bewegung des Wassers durch einen Canal, für den s nicht gleich Null ist, durchgeführt werden, oder auch für den Fall, dass s negativ, das Bodengefäll des Canals also dem Gesammtgefälle $H - h$ der Canalstrecke entgegengesetzt gerichtet ist.

Im grossen Ganzen stimmen diese analytischen Folgerungen hinreichend mit der Erfahrung überein, so lange die äusseren Umstände von den der Rechnung zu Grunde liegenden Voraussetzungen nicht zu weit abweichen. Es sei aber nochmals darauf hingewiesen, dass sie in keinem Falle einen Anspruch auf grosse Genauigkeit machen können. Wie schon aus den Bemerkungen im vorigen Paragraphen hervorgeht, entspricht namentlich die Annahme, dass der Coefficient k der Geschwindigkeitsformel als constant angesehen werden könne, der Wirklichkeit keineswegs vollkommen. Ausserdem kam auch bei den vorausgehenden Entwickelungen eine Ungenauigkeit vor, auf die bisher noch nicht hingewiesen wurde. Zur Berechnung der lebendigen Kraft der strömenden Wassermasse wurde nämlich die mittlere Geschwindigkeit v benutzt, die dadurch definirt ist, dass ihr Product mit der Querschnittsfläche die Durchflussmenge Q liefert. Genau genommen hätte anstatt dessen der quadratische Mittelwerth der Geschwindigkeiten der einzelnen Wasserfäden gesetzt werden müssen, der von jenem etwas abweicht. Dieser Umstand macht indessen bei den gewöhnlich vorliegenden Fällen nicht viel aus.

§ 64. Das Gleichgewicht schwimmender Körper.

Ein fester Körper schwimme auf dem Wasser, so dass er zum Theile in das Wasser eintaucht, zum Theile über die Oberfläche emporragt. Der Körper und das ihn umgebende Wasser mögen in dieser Lage im Gleichgewichte, also in Ruhe sein. Dann erfährt jedes Element der benetzten Oberfläche

des Körpers einen Druck von Seiten des Wassers, der rechtwinklig zum Flächenelemente gerichtet ist und dessen Grösse durch Gl. (134), die sich hier in der Form

$$p = \gamma h$$

anschreiben lässt, angegeben wird. Unter h ist die Tiefe des Flächenelementes unter dem Wasserspiegel zu verstehen, von dem angenommen wird, dass an ihm der Flüssigkeitsdruck gleich Null ist; p ist der auf die Flächeneinheit bezogene Druck, der auf das Flächenelement dF kommende daher gleich pdF.

Alle diese Druckkräfte müssen mit den übrigen äusseren Kräften, die an dem schwimmenden Körper angreifen, im Gleichgewichte stehen. Gewöhnlich kommt von äusseren Kräften sonst nur noch das Gewicht des schwimmenden Körpers in Frage. Von diesem Falle soll jetzt auch allein die Rede sein. Der resultirende Wasserdruck wird der Auftrieb genannt, den der schwimmende Körper von Seiten des Wassers erfährt. Der Auftrieb muss also, wenn Gleichgewicht bestehen soll, gleich dem Gewichte und senkrecht nach oben gerichtet sein und zugleich muss seine Richtungslinie mit der lothrechten Schwerlinie des schwimmenden Körpers zusammenfallen, weil sonst der Auftrieb und das Gewicht ein Kräftepaar bilden würden, das eine Drehung des schwimmenden Körpers hervorbrächte.

Um diese Gleichgewichtsbedingungen weiter zu verwerthen, muss man vor Allem den Auftrieb, also die Resultirende der an den einzelnen Flächenelementen angreifenden Druckkräfte pdF berechnen. Dies könnte auf Grund des für p angegebenen Werthes ohne Weiteres geschehen. Einfacher gelangt man aber durch eine andere Ueberlegung zum Ziele. Man denke sich nämlich den schwimmenden Körper entfernt und den unterhalb des Wasserspiegels liegenden Raum, den er vorher einnahm, mit Wasser ausgefüllt. Dann besteht abermals Gleichgewicht. Die Druckkräfte, die der neu hinzugekommene Wasserkörper von Seiten des angrenzenden Wassers

erfährt, sind genau so gross, als vorher und der Auftrieb, den wir berechnen wollten, muss daher gleich dem Gewichte des Wasserkörpers sein, senkrecht nach oben und durch den Schwerpunkt dieses Wasserkörpers gehen. Dadurch ist die Berechnung des Auftriebs in jedem Falle auf die Ermittelung des Volumens und die Aufsuchung des Schwerpunktes des von dem schwimmenden Körper verdrängten Wassers zurückgeführt.

Die Gleichgewichtsbedingungen lassen sich jetzt dahin zusammenfassen, dass der Körper so tief eintauchen muss, dass das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers gleich seinem eigenen Gewichte ist und dass ferner die Schwerpunkte des Körpers und des von ihm verdrängten Wassers auf einer Lothlinie liegen müssen.

Diese Betrachtungen sind auch noch anwendbar auf den Fall, dass der Körper nicht an der Oberfläche schwimmt, sondern ganz eingetaucht ist. Ohne weitere äussere Kräfte kann er dann nur im Gleichgewichte sein, wenn er ebenso viel wiegt, als eine Wassermenge von dem gleichen Rauminhalte. Ist er schwerer, so kann er durch die Spannung eines Fadens, an dem er aufgehängt ist, im Gleichgewichte gehalten werden. Die Fadenspannung ist dann gleich dem Unterschiede zwischen dem Eigengewichte des Körpers und dem Auftriebe. Der Faden muss senkrecht gerichtet sein und ausserdem muss für den Schwerpunkt des Körpers als Momentenpunkt das statische Moment der Fadenspannung gleich und entgegengesetzt gerichtet dem statischen Momente des Auftriebs sein. Jedenfalls müssen also auch der Befestigungspunkt des Fadens, der Schwerpunkt des Körpers und der Schwerpunkt des verdrängten Wassers in einer lothrechten Ebene liegen.

Für Körper grösseren Umfangs stimmen alle diese Folgerungen sehr genau mit der Wirklichkeit überein. Dagegen kann z. B. eine Nähnadel bei einiger Vorsicht so auf eine Wasseroberfläche gelegt werden, dass sie darauf schwimmt, während ein grösseres Stahlstück untergeht. Ist die Nähnadel

aber erst vollständig eingetaucht, so verhält sie sich weiterhin ebenso wie ein grösseres Stück. Jene Abweichung von der gewöhnlichen Regel wird durch die Capillarerscheinungen begründet, auf die in der Mechanik der vollkommenen Flüssigkeit keine Rücksicht genommen wird.

Vorher war nur von den Bedingungen die Rede, die jedenfalls erfüllt sein müssen, wenn der schwimmende Körper im Gleichgewichte sein soll. Es fragt sich aber noch, ob das Gleichgewicht auch wirklich aufrecht erhalten werden kann, d. h. ob es stabil, labil oder indifferent ist. Um diese Frage zu entscheiden, müssen wir so verfahren, wie schon in § 28, d. h. wir müssen uns den Körper ein wenig aus seiner augenblicklichen Lage verschoben denken und nun untersuchen, ob er sich in die frühere Lage von selbst zurückbewegt oder nicht. Dabei genügt es, wenn wir uns den Körper ein wenig nach irgend einer Seite hin so gedreht denken, dass das von ihm verdrängte Wasservolumen und mit ihm der Auftrieb der Grösse nach ungeändert bleiben. Erfährt nämlich der Körper eine Verschiebung ohne Drehung, zunächst in einer horizontalen Richtung, so bewegt er sich zwar nicht in die frühere Lage von selbst zurück und er entfernt sich auch nicht weiter aus ihr, das Gleichgewicht ist also für solche Verschiebungen indifferent; jedenfalls schwimmt er aber im Uebrigen immer noch grade so wie vorher. Auf Lagenänderungen dieser Art nimmt man aber, wenn vom stabilen oder labilen Gleichgewichte schwimmender Körper die Rede ist, keine Rücksicht; man will nur wissen, ob der Körper umkippt oder nicht. Dass das Gleichgewicht in Bezug auf Verschiebungen in lothrechter Richtung immer stabil ist, so lange dabei nicht etwa ein Eintritt des Wassers in vorher über Wasser liegende Oeffnungen ermöglicht wird, ist von vornherein klar.

Nach einer kleinen Drehung, die dem schwimmenden Körper ohne Aenderung der Grösse des Auftriebs ertheilt wurde, geht die Richtung des Auftriebs im Allgemeinen nicht mehr durch den Schwerpunkt des Körpers. Gewicht und Auftrieb bilden daher jetzt ein Kräftepaar miteinander, das

nun seinerseits eine Drehung des Körpers um dessen Schwerpunkt herbeiführt. Wenn diese Drehung im Sinne der früher bewirkten vor sich geht, entfernt sich der Körper von selbst immer weiter von der anfänglichen Gleichgewichtslage und das Gleichgewicht war labil; im entgegengesetzten Falle ist es stabil. Es handelt sich also darum, ein einfaches Kennzeichen dafür aufzusuchen, welcher von beiden Fällen vorliegt.

Offenbar hängt dies wesentlich von der Gestalt der benetzten Oberfläche des schwimmenden Körpers und der sich unmittelbar anschliessenden Oberflächentheile, die bei einer Drehung benetzt werden können, ab. So erkennt man sofort, dass ein cylindrischer Baumstamm, der auf dem Wasser schwimmt, im indifferenten Gleichgewichte ist. Denn nach einer kleinen Drehung um die Cylinderaxe geht der Auftrieb immer noch genau wie vorher durch den in der Mitte liegenden Schwerpunkt, und es tritt daher überhaupt kein Kräftepaar auf, das den Stamm nach der einen oder anderen Richtung weiter zu drehen suchte. Anders ist dies, wenn der Schwerpunkt des Stammes nicht in der Mitte liegt. Dann ist das Gleichgewicht stabil, wenn der Schwerpunkt seine tiefste Lage einnimmt, und labil, wenn er am höchsten liegt. Ein Mensch, der sich auf den Baumstamm oben aufsetzte, ohne mit den Beinen ins Wasser zu tauchen, könnte also nicht dauernd im Gleichgewichte bleiben; der Stamm würde sich drehen und ihn abwerfen. Auch ein Schiff, dessen Wand kreisförmig gekrümmt ist, kann nur dann im stabilen Gleichgewichte sein, wenn der Schwerpunkt des Schiffes sammt seiner Belastung tiefer als der Mittelpunkt des Kreisbogens liegt.

Man betrachte jetzt ein Schiff, dessen Querschnitt rechteckig ist, wie in Abb. 95. Es wäre unbequem, den ganzen Schiffsquerschnitt in der Zeichnung zu drehen, um eine der Gleichgewichtslage benachbarte Lage anzugeben. Anstatt dessen kann man sich die ganze Zeichnung ein wenig gedreht denken, so dass nachher die Linie BB horizontal steht und den Wasserspiegel angibt, an Stelle der Linie AA, die

für die erste Lage gilt. In der durch BB angezeigten Lage des Schiffes hat das für den Auftrieb maassgebende Volumen des verdrängten Wassers einen trapezförmigen Querschnitt und der Auftrieb selbst geht durch den Schwerpunkt dieses Trapezes und steht senkrecht zu der jetzt horizontal zu denkenden Linie BB. Damit der Auftrieb ebenso gross bleibt, wie in der ersten Lage, müssen sich die Linien AA und BB auf der Axe CC des Schiffsquerschnittes schneiden. Der Schnittpunkt der Richtungslinie des Auftriebs in der Lage BB mit

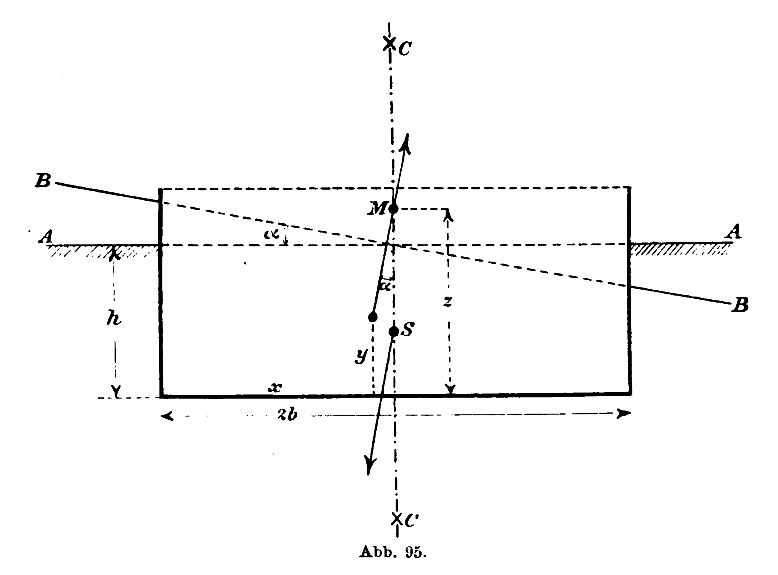


Abb. 95.

der Axe CC heisst das Metacentrum; in der Abbildung ist dieser Punkt mit dem Buchstaben M bezeichnet. Das Gewicht des Schiffes sammt Ladung geht durch den Schiffsschwerpunkt S. In der Lage BB ist das Gewicht ebenfalls senkrecht zur Linie BB gerichtet, da diese jetzt mit dem Horizonte zusammenfällt. Auftrieb und Gewicht bilden demnach ein Kräftepaar, dessen Hebelarm gleich dem Abstande der Punkte M und S multiplicirt mit dem Sinus des Neigungswinkels α ist, um den das Schiff aus der Gleichgewichtslage gedreht wurde.

Wenn in Abb. 95 das Metacentrum M höher liegt als der Schiffsschwerpunkt S, also so wie dort gezeichnet, sucht das Kräftepaar aus Auftrieb und Gewicht den Schiffskörper im Sinne des Uhrzeigers gegen den Wasserspiegel BB zu drehen. Dabei richtet sich aber das Schiff wieder auf und das Gleichgewicht ist stabil. Es wird dagegen labil und ein Kentern tritt ein, sobald das Metacentrum tiefer liegt, als der Schiffsschwerpunkt. Es wird also nur darauf ankommen, die Lage des Metacentrums zu ermitteln, um die Schwimmsicherheit eines Schiffes zu beurtheilen. Man erkennt auch, dass diese Frage bei jeder Form des Schiffsquerschnitts einfach auf Grund von Schwerpunktsbestimmungen beantwortet werden kann.

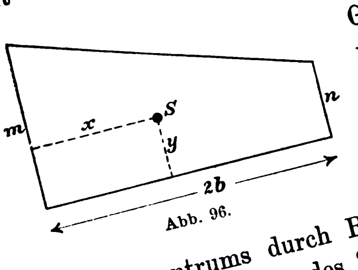


Abb. 96.

Für den Fall des rechteckigen Schiffsquerschnittes soll diese Betrachtung noch etwas weiter durchgeführt und die Höhenlage des Metacentrums durch Rechnung festgestellt werden. Die Coordinaten x und y des Schwerpunktes eines an der Grundlinie $2b$ rechtwinkligen Trapezes, das in Abb. 96 gezeichne[t] ist, folgen nach dem Momentensatze, also nach dem in § 2 angegebenen Verfahren zu

$$x = 2b \cdot \frac{m + 2n}{3(m+n)}; \quad y = \frac{m^2 + mn + n^2}{3(m+n)}.$$

In Abb. 95 tritt hier an Stelle von m die Trapezseite $h + b$ und an Stelle von n die Seite $h - b \operatorname{tg} \alpha$. Setzt man Werthe ein, so erhält man

$$x = b \frac{3h - b \operatorname{tg} \alpha}{3h}; \quad y = \frac{3h^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{6h}.$$

Aus x und y erhält man aber auch z, wie aus Abb. vorgeht, mit Hülfe der Beziehung

$$z = y + (b - x) \operatorname{cotg} \alpha.$$

rausgehenden Werthe geht d

$$z = \frac{h}{2} + \frac{b^2}{6h}(2 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \tag{160}$$

Damit ist die Höhenlage des Metacentrums über dem Schiffsboden bekannt. Man erkennt, dass M immer höher rückt, je grösser der Neigungswinkel α gewählt wird. Für eine sehr kleine Drehung aus der Gleichgewichtslage nimmt z seinen kleinsten Werth

$$z_0 = \frac{h}{2} + \frac{b^2}{3h} \tag{161}$$

an. Um ein Schieflegen des Schiffes zu vermeiden, muss man durch eine geeignete Gewichtsvertheilung dafür sorgen, dass der Abstand des Schiffsschwerpunktes vom Schiffsboden aus kleiner bleibt, als z_0. — Von dem Höhenunterschiede zwischen den Punkten M und S hängt auch die Schwingungsdauer der pendelnden Bewegungen des Schiffes der Quere nach ab, die man als das „Schlingern“ bezeichnet. Auf diese Betrachtungen kann aber hier nicht weiter eingegangen werden.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Erster Abschnitt.

Mechanik des materiellen Punktes.

Seite

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = 0 \qquad (1)\ 18$$

$\mathfrak{v}$ Geschwindigkeit, t Zeit, Aussage des Trägheitsgesetzes für den materiellen Punkt, auf den keine Kräfte wirken.

$$Q = mg \qquad (5)\ 30$$

Q Gewicht, m Masse, g Beschleunigung der Schwere.

$$P = mb, \qquad (6)\ 31$$

das dynamische Grundgesetz, b die durch eine Kraft P hervorgerufene Beschleunigung.

Zusammenstellung der Formeln für die

	gleichf. beschleun. Bewegung	gleichf. verzögerte Bewegung	
α)	$v = v_0 + bt,$	$v = v_0 - bt,$	(13) 35
β)	$s = v_0 t + \frac{bt^2}{2},$	$s = v_0 t - \frac{bt^2}{2},$	
γ)	$s = \frac{v + v_0}{2} t,$	$s = \frac{v + v_0}{2} t,$	
δ)	$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2b};$	$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2b}.$	

Dimensions-Formeln:

$$[v] = \frac{L}{T} = LT^{-1}, \qquad (14)\ 36$$

$$[b] = \frac{[v]}{T} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}, \qquad (15)\ 37$$

$$[m] = KL^{-1}T^2, \qquad (16)\ 40$$

$$[P] = MLT^{-2}. \qquad (17)\ 40$$

Fallbewegung mit Luftwiderstand:

Seite

$$P = Q - kv^2, \qquad (18)\ \mathbf{45}$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{k'}} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{gk'}} - 1}{e^{2t\sqrt{gk'}} + 1}, \qquad (19)\ \mathbf{46}$$

$$s = \frac{1}{k'}\left\{\lg \frac{e^{2t\sqrt{gk'}} + 1}{2} - t\sqrt{gk'}\right\}, \qquad (20)\ \mathbf{46}$$

k eine von der Gestalt und Grösse der Körperoberfläche abhängige Constante, $k' = \frac{k}{m}$, v die Geschwindigkeit nach Ablauf der Zeit t und s der zurückgelegte Weg.

$$Ps = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}, \qquad (21)\ \mathbf{49}$$

Satz von der lebendigen Kraft, Ps die geleistete Arbeit, $\frac{mv^2}{2}$ die lebendige Kraft.

$$\int P dt = mv - mv_0, \qquad (24)\ \mathbf{51}$$

Satz vom Antriebe, $\int P dt$ das Zeitintegral der Kraft oder der Antrieb und mv die Bewegungsgrösse.

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z, \qquad (25)\ \mathbf{53}$$

Zusammensetzung eines Radiusvectors aus seinen Componenten oder Coordinaten.

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{s}}{dt}, \qquad (27)\ \mathbf{55}$$

Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ als die zeitliche Aenderung des Radiusvectors $\mathfrak{s}$ dargestellt.

$$v_1 = \frac{dx}{dt}; \quad v_2 = \frac{dy}{dt}; \quad v_3 = \frac{dz}{dt}, \qquad (29)\ \mathbf{55}$$

Coordinatendarstellung von Gl. (27).

$$\mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}, \qquad (30 \text{ u. } 31)\ \mathbf{56}$$

$$b_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad b_2 = \frac{dv_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad b_3 = \frac{dv_3}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \qquad (32)\ \mathbf{56}$$

Darstellung der Beschleunigung und ihrer Componenten als Differentialquotienten der Geschwindigkeit oder des Radiusvectors nach der Zeit.

Seite

$$\mathfrak{P} = m\mathfrak{b} = m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = m\frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2}, \qquad (33)\ 60$$

allgemeinste Form der dynamischen Grundgleichung für den materiellen Punkt, $\mathfrak{P}$ die Kraft.

$$\mathfrak{R} = \Sigma\mathfrak{P}, \qquad (35)\ 61$$

Satz vom Kräfteparallelogramm in der allgemeinsten Form, $\mathfrak{R}$ die Resultirende der $\mathfrak{P}$.

$$\Sigma\mathfrak{P} = 0, \qquad (36)\ 62$$

nothwendige und hinreichende Gleichgewichtsbedingung für einen einzelnen materiellen Punkt.

$$\mathfrak{R}' = \Sigma\mathfrak{P}' \quad \text{und} \quad \Sigma\mathfrak{P}' = 0, \qquad (37\ \text{u.}\ 38)\ 62$$

Beziehung zwischen den Projectionen $\mathfrak{P}'$ auf irgend eine Ebene, für den Fall, dass eine Resultirende oder dass Gleichgewicht besteht.

$$\mathfrak{v} = v \cdot \mathfrak{v}_1, \qquad (39)\ 65$$

Zerlegung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in den Richtungsfactor $\mathfrak{v}_1$ und die absolute Grösse v.

$$C = \frac{mv^2}{r} = \frac{Qv^2}{gr}, \qquad (41)\ 67$$

C Centripetal- oder Centrifugalkraft bei der Bewegung im Kreise vom Radius r.

$$\mathfrak{P} = mv\frac{d\mathfrak{v}_1}{dt} + m\mathfrak{v}_1\frac{dv}{dt}, \qquad (42)\ 68$$

Zerlegung der ganzen Kraft $\mathfrak{P}$ an einem beliebig (krummlinig) bewegten materiellen Punkte in eine Normal- und eine Tangentialcomponente.

$$\int \mathfrak{P}\,d\mathfrak{s} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}, \qquad (43)\ 75$$

allgemeinste Form des Satzes von der lebendigen Kraft für den beliebig bewegten Punkt.

$$\mathfrak{R}\mathfrak{s} = \Sigma\mathfrak{P}\mathfrak{s}, \qquad (44)\ 76$$

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, $\mathfrak{R}$ Resultirende der $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{s}$ ein beliebig gedachter Weg.

Seite

$$\Sigma \mathfrak{P} \mathfrak{s} = 0, \tag{45}$$ 77

dasselbe für den Gleichgewichtsfall.

$$\mathfrak{M} = V \mathfrak{P} \mathfrak{r}, \tag{46}$$ 82

Einführung des Operationszeichens V für das äussere Product; $\mathfrak{M}$ das statische Moment der Kraft $\mathfrak{P}$ mit dem Hebelarme $\mathfrak{r}$.

$$V \mathfrak{P} \mathfrak{r} = - V \mathfrak{r} \mathfrak{P}, \tag{47}$$ 84

Satz über die Reihenfolge der Factoren im äusseren Producte.

$$\left. \begin{array}{lll} V \mathfrak{i} \mathfrak{j} = \mathfrak{k}; & V \mathfrak{j} \mathfrak{k} = \mathfrak{i}; & V \mathfrak{k} \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \\ V \mathfrak{j} \mathfrak{i} = - \mathfrak{k}; & V \mathfrak{k} \mathfrak{j} = - \mathfrak{i}; & V \mathfrak{i} \mathfrak{k} = - \mathfrak{j} \end{array} \right\}, \tag{48}$$ 87

Multiplicationsregeln für die Richtungsfactoren im Rechtssysteme.

$$V \mathfrak{R} \mathfrak{r} = \Sigma V \mathfrak{P} \mathfrak{r}, \tag{49}$$ 88

Momentensatz; gilt für jeden beliebigen Momentenpunkt.

$$\Sigma V \mathfrak{P} \mathfrak{r} = 0, \tag{50}$$ 90

dasselbe für den Gleichgewichtsfall.

$$V \mathfrak{R}' \mathfrak{r} = \Sigma V \mathfrak{P}' \mathfrak{r}, \tag{51}$$ 93

Momentensatz für die Projectionen der Kräfte in einer Ebene oder auch für die Momente in Bezug auf eine Axe.

$$V \mathfrak{P} \mathfrak{r} = \mathfrak{i} (Yz - Zy) + \mathfrak{j} (Zx - Xz) + \mathfrak{k} (Xy - Yx), \tag{52}$$ 94

Darstellung des statischen Momentes durch seine Componenten, d. h. durch die Momente in Bezug auf die Coordinatenaxen.

$$V \mathfrak{A} \mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}, \tag{53}$$ 94

Zerlegung eines beliebigen äusseren Products in seine Componenten.

Seite

Zweiter Abschnitt.

Mechanik des starren Körpers.

$$u = \frac{d\varphi}{dt}; \quad w = \frac{du}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \qquad \text{(55 u. 56)} \quad 117$$

φ Drehungswinkel, u Winkelgeschwindigkeit, w Winkelbeschleunigung.

$$\mathfrak{v} = V\mathfrak{u}\mathfrak{r}, \qquad (57) \quad 124$$

Darstellung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ eines beliebigen Punktes, von dem der Radiusvector $\mathfrak{r}$ nach dem Anfangspunkte gezogen ist, bei einer Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ um eine durch den Anfangspunkt gehende Axe.

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r} = \mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{r}'\mathfrak{u}, \qquad (59) \quad 125$$

Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes bei der allgemeinsten Bewegung eines starren Körpers, $\mathfrak{v}_0$ Geschwindigkeit des Bezugspunktes, $\mathfrak{r}' = -\mathfrak{r}$.

$$\Sigma\Sigma\mathfrak{J} = 0; \quad \Sigma\Sigma V\mathfrak{J}\mathfrak{r} = 0; \quad \Sigma\Sigma\mathfrak{J}\mathfrak{s} = 0, \qquad (64) \quad 145$$

Bedingungen, denen dem Wechselwirkungsgesetze (in der allgemeineren Auffassung) zufolge die inneren Kräfte $\mathfrak{J}$ in einem Körper oder einem Systeme von Körpern jedenfalls genügen müssen.

Dritter Abschnitt.

Die Lehre vom Schwerpunkte.

$$\mathfrak{s} = \frac{m_1\mathfrak{r}_1 + m_2\mathfrak{r}_2 + m_3\mathfrak{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\Sigma m\mathfrak{r}}{\Sigma m}, \qquad (66) \quad 165$$

$\mathfrak{s}$ das graphische Mittel der Massenabstände $\mathfrak{r}$, wofür auch

$$M\mathfrak{s} = \Sigma m\mathfrak{r} \qquad (67) \quad 166$$

geschrieben werden kann; M Gesammtmasse des Punkthaufens.

$$\Sigma m\mathfrak{r} = 0, \qquad (69) \quad 167$$

nothwendige und hinreichende Bedingung für den Schwerpunkt.

Seite

$$Ms = \Sigma mx, \qquad (70 \text{ u. } 73) \quad \mathbf{171/172}$$

s Schwerpunktsabstand von Axe oder von Ebene; x die Abstände der einzelnen Punkte des Haufens.

$$\Sigma mx = 0, \qquad (74) \quad \mathbf{172}$$

Schwerpunktsbedingung.

$$M\mathfrak{v}_0 = \Sigma m\mathfrak{v}, \qquad (76) \quad \mathbf{190}$$

$\mathfrak{v}_0$ Geschwindigkeit des Schwerpunkts.

$$M\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \Sigma \mathfrak{P} \qquad (78) \quad \mathbf{191}$$

spricht den Satz von der Bewegung des Schwerpunkts aus.

$$L = \frac{1}{2}M\mathfrak{v}_0{}^2 + \frac{1}{2}\Theta u^2, \qquad (79) \quad \mathbf{198}$$

L lebendige Kraft eines starren Körpers bei einer beliebigen Bewegung, $\mathfrak{v}_0$ Schwerpunktsgeschwindigkeit, M Masse, Θ Trägheitsmoment für die durch den Schwerpunkt gehende Drehaxe.

$$L = \frac{1}{2}\Theta u^2, \qquad (80) \quad \mathbf{199}$$

lebendige Kraft eines rotirenden Körpers; Θ das Trägheitsmoment für die Rotationsaxe (die jetzt nicht durch den Schwerpunkt zu gehen braucht).

$$\Theta\frac{du}{dt} = Pp, \qquad (81) \quad \mathbf{200}$$

Zusammenhang zwischen der Winkelbeschleunigung $\frac{du}{dt}$ der drehenden Bewegung und dem statischen Momente Pp, das sie hervorbringt. (Gegenstück zur dynamischen Grundgleichung für die fortschreitende Bewegung.)

Seite

Vierter Abschnitt.

Energieumwandlungen.

$$A = \gamma u^2 \Theta,$$ (82) 209

A Arbeitsleistung, die im Schwungrade einer Dampfmaschine, aufgespeichert werden soll, γ Ungleichförmigkeitsgrad.

$$Mr \cos \varphi u^2,$$ 212

Formel für den Massendruck des Gestänges der Dampfmaschine, M Masse des Gestänges, r Kurbelradius, φ Kurbelstellung.

Zusammenstellung der physikalischen und technischen Maasseinheiten für Kraft, Energie und Energieströme auf Seite 222

Fünfter Abschnitt.

Die Reibung.

$$F = fN,$$ (83) 226

F gleitende Reibung, N Normaldruck, f Reibungscoefficient.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{N} = f,$$ (84) 231

Einführung des Reibungswinkels φ.

$$q = rf',$$ (85) 242

q Halbmesser des Reibungskreises bei der Zapfenreibung, f' der zugehörige Reibungscoefficient und r der Zapfenhalbmesser.

$$H = Q\frac{rf' + e}{R} = f''Q,$$ (87) 252

H Zugkraft für die Bewegung eines Wagens vom Gewichte Q auf horizontaler Bahn, R Radhalbmesser, r Zapfenhalbmesser, e die in Folge der rollenden Reibung auftretende Horizontalverschiebung des Angriffspunktes des Druckes, mit dem das Rad auf dem Boden aufsitzt, f'' der sich aus diesen Grössen zusammensetzende Factor des Zugwiderstands.

Seite

$$T_1 = T_0 e^{fa}, \qquad (88) \quad 256$$

T_1 und T_0 die Endspannungen eines im Grenzzustande des Gleitens befindlichen Seiles oder Riemens, der über eine kreisförmige Scheibe geschlungen ist, α der umspannte Bogen, f Reibungscoefficient für gleitende Reibung, $e = 2{,}718\ldots$

$$S_1 = \eta S_0, \qquad (89) \quad 261$$

η der Wirkungsgrad einer Rolle, S_1 und S_0 Spannungen des auflaufenden und des ablaufenden Seils.

$$\eta = \frac{h}{h + lf}, \qquad (91) \quad 265$$

Näherungsformel für den Wirkungsgrad einer flachgängigen Schraube von geringer Steigung h, l Umfang eines Gewindeumlaufs.

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}, \qquad (94) \quad 268$$

genauere Formel für diesen Wirkungsgrad, α der Steigungswinkel, φ der Reibungswinkel.

$$\eta = \frac{h}{h + \frac{s}{t} fl}, \qquad (98) \quad 270$$

Näherungsformel für den Wirkungsgrad der scharfgängigen Schraube, t Gewindetiefe, s Seite des Gewindequerschnitts.

$$P 2 p \pi = Qh + \frac{Qfl}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} - f \sin \alpha}, \qquad (99) \quad 271$$

genauere Formel für die scharfgängige Schraube, Bedeutung von β aus Abb. 76 zu entnehmen.

Seite

Sechster Abschnitt.

Elasticität und Festigkeit.

$$A = \int_0^{\Delta l_1} P\, d\Delta l, \qquad (100)\ \textbf{285}$$

A Formänderungsarbeit, die von der Kraft P geleistet wird, wenn sie die Formänderung Δl_1 hervorbringt.

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}, \qquad (103)\ \textbf{288}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}, \qquad (105)\ \textbf{289}$$

Δl Längenänderung eines Stabes von der ursprünglichen Länge l unter der Kraft P, F Querschnittsfläche, $\sigma = \frac{P}{F}$ die specifische Spannung und E der Elasticitätsmodul.

$$F = F_0 \cdot e^{\frac{\gamma}{\varkappa} x}, \qquad (106)\ \textbf{292}$$

F_0 der Anfangsquerschnitt eines verjüngten Seiles, F Querschnitt im Abstande x, γ das specifische Gewicht, $\varkappa$ die zulässige specifische Spannung des Materials.

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{y}{e} \qquad (107)\ \textbf{297}$$

spricht die Hypothese der linearen Spannungsvertheilung bei der Biegung aus.

$$\sigma' = \frac{M}{\Theta} e; \quad \sigma' = \frac{M}{W}, \qquad (108 \text{ u. } 109)\ \textbf{299/300}$$

gewöhnliche Biegungsformel, σ' Kantenspannung, M Biegungsmoment, Θ Trägheitsmoment, e Abstand der äussersten Faser von der Mitte, W Widerstandsmoment.

$$\Theta = \frac{bh^3}{12}, \qquad (110)\ \textbf{300}$$

Formel für das Trägheitsmoment des rechteckigen Querschnitts von der Breite b und der Höhe h.

Seite

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{Pp}{W}, \qquad (111)\ 302$$

Formel für die excentrische Zug- oder Druckbelastung, p Excentricität des Kraftangriffs.

$$P = \frac{\pi^2 E \Theta}{l^2}, \qquad (112)\ 303$$

Formel von Euler für Lagerung zwischen Spitzen, l Stablänge.

$$\tau = \frac{2M}{\pi a^3}, \qquad (114)\ 305$$

τ Torsionsspannung einer auf Verdrehen beanspruchten Welle, M Verwindungsmoment, a Halbmesser des kreisförmigen Querschnitts.

Siebenter Abschnitt.

Der Stoss fester Körper.

$$u = \frac{Q_1 v_1 + Q_2 v_2}{Q_1 + Q_2}, \qquad (116)\ 312$$

u gemeinsame Geschwindigkeit der Körper von den Gewichten $Q_1 Q_2$ und den Anfangsgeschwindigkeiten $v_1 v_2$ am Ende der ersten Stossperiode beim graden centralen Stosse.

$$\text{Verl} = \frac{Q_1 Q_2}{Q_1 + Q_2} \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}, \qquad (117)\ 313$$

Verl = Verlust an lebendiger Kraft während der ersten Stossperiode, g Beschleunigung der Schwere.

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{Q_1 v_1 + Q_2(2v_2 - v_1)}{Q_1 + Q_2} \\ w_2 &= \frac{Q_1(2v_1 - v_2) + Q_2 v_2}{Q_1 + Q_2} \end{aligned}\right\}, \qquad (119)\ 317$$

$w_1 w_2$ Endgeschwindigkeiten beider Körper beim vollkommen elastischen Stosse.

$$L = L_0 \qquad (120)\ 318$$

drückt aus, dass beim vollkommen elastischen Stosse kein Verlust an lebendiger Kraft (L) stattfindet.

Seite

$$P = \frac{Q^2}{Q + Q'} \cdot \frac{H}{h}, \qquad (121) \quad 323$$

P Tragkraft eines Pfahles, Q' Pfahlgewicht, Q Gewicht des Rammbärs, der aus der Höhe H herabfällt und den Pfahl um h eindringen lässt (Formel ziemlich unzuverlässig).

$$Ph = Q(H - H_0), \qquad (122) \quad 326$$

andere (aber auch nicht viel bessere) Formel für die Tragkraft des Pfahls; H_0 die unwirksame Hubhöhe des Rammbärs.

$$m_2' = m_2 \frac{t^2}{p^2 + t^2}, \qquad (126) \quad 329$$

m_2' die reducirte Masse, die beim excentrischen Stosse an Stelle der Masse m_2 einzuführen ist, um den Fall auf den des graden Stosses zurückzuführen, p Excentricität, d. h. Abstand der Stossnormale vom Schwerpunkte und t Trägheitshalbmesser in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Drehaxe.

$$M_{\text{red}} = \frac{\Theta}{p^2} = \frac{Q_2}{g}\left(\frac{t}{p}\right)^2, \qquad (128) \quad 333$$

M_{red} die reducirte Masse eines Körpers mit fester Drehaxe, gegen den ein Stoss mit der Excentricität p ausgeführt wird, t Trägheitshalbmesser für die feste Drehaxe, Q_2 Gewicht des Körpers.

$$z = \frac{t^2}{p}, \qquad (129) \quad 336$$

z Abstand des Stossmittelpunktes vom Schwerpunkte eines freien, excentrisch gestossenen Körpers, p Abstand der Stossnormale vom Schwerpunkte, t Trägheitshalbmesser für die Schwerpunktsaxe.

$$w_1 = f p_1 \frac{Q_2 u}{g \Theta_1}, \qquad (130) \quad 339$$

$$w_2 = f p_2 \frac{Q_2 u}{g \Theta_2}, \qquad (131) \quad 339$$

Seite

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= V_1 - f\frac{Q_2}{Q_1}u \\ U_2 &= fu \end{aligned}\right\}, \qquad (132)\ 339$$

Formeln für den schiefen Stoss; Q_1 stösst auf das ruhende Q_2, Normalcomponente der Anfangsgeschwindigkeit v_1, Tangentialcomponente V_1; w_1 Winkelgeschwindigkeit von Q_1 am Ende der ersten Stossperiode, p_1 Kugelhalbmesser, f Reibungscoefficient, Θ_1 Trägheitsmoment von Q_1; ähnlich bei Q_2. Ferner $U_1\,U_2$ die Tangentialcomponenten der Geschwindigkeiten beider Körper am Ende der ersten Stossperiode.

$$\operatorname{tg}\alpha = f\cdot\frac{1}{Q_1+Q_2}\left(Q_2\frac{t_1^2+p_1^2}{t_1^2}+Q_1\frac{t_2^2+p_2^2}{t_2^2}\right), \qquad (133)\ 340$$

α der Winkel, den die Stossrichtung mit der Richtung der Normalen bildet; wenn $\operatorname{tg}\alpha$ mindestens den hier angegebenen Werth hat, gelten die Formeln 130—132, bei einem weniger schiefen Stosse werden sie ungültig.

Achter Abschnitt.

Die Mechanik flüssiger Körper.

$$p' = p + \gamma h, \qquad (134)\ 354$$

p und p' die Drücke an zwei Stellen einer ruhenden Flüssigkeit im Höhenabstande h, γ specifisches Gewicht.

$$A = \int p\,dV, \qquad (135)\ 356$$

A Arbeit der äusseren Kräfte bei einer Volumenänderung der Flüssigkeit.

$$v = c\sqrt{2gh}, \qquad (136)\ 358$$

v Ausflussgeschwindigkeit, c Geschwindigkeitscoefficient, h Druckhöhe.

Seite

$$Q = kF\sqrt{2gh}, \qquad (138) \quad 359$$

Q Ausflussmenge (in Raumeinheiten ausgedrückt), F Ausfluss-Querschnitt, k Ausflusscoefficient.

$$p' = p + \gamma(h + H - H') \qquad (140) \quad 363$$

tritt an Stelle von Gl. (130) bei bewegter Flüssigkeit; H und H' die Geschwindigkeitshöhen an zwei Stellen eines Stromfadens, auf die sich auch p und p' und der Höhenunterschied h beziehen.

$$v = c\sqrt{2g(h - h')}, \qquad (141) \quad 366$$

für den Ausfluss unter Wasser beim Druckhöhenunterschiede $h - h'$.

$$Q = \frac{2}{3} kF\sqrt{2gh}, \qquad (143) \quad 368$$

Q Wassermenge für ein Ueberfallwehr.

$$t = \frac{2(\sqrt{h} - \sqrt{h'})}{kf\sqrt{2g}} F, \qquad (145) \quad 370$$

t Zeit, die vergeht, bis sich der Wasserstand in einem cylindrischen Gefässe vom Querschnitte F von h bis h' gesenkt hat, f Querschnitt der Ausflussöffnung.

$$P = \frac{\gamma F v^2}{g}, \qquad (146) \quad 372$$

P Druck eines Wasserstrahls vom Querschnitte F gegen eine ebene Wand.

$$P = \frac{\gamma F v^2}{g}(1 - \cos\alpha) \qquad (148) \quad 373$$

tritt an Stelle der vorigen Formel, wenn die Richtung des abfliessenden Wassers mit der ursprünglichen Bewegungsrichtung den Winkel α bildet.

$$P = \frac{\gamma F v^2}{g} \sin\alpha, \qquad (149) \quad 376$$

P Normaldruck eines schief auf eine ebene Wand auftreffenden Wasserstrahls, α ist hier der Winkel, den die Richtung des Strahls mit der Wand bildet.

Seite

$$P = \frac{\gamma Q v}{g} = \gamma \frac{F v^2}{g} = 2 \gamma F h, \qquad (151) \quad 378$$

P die Reaction eines aus dem Querschnitte F ohne weitere Contraction austretenden Strahles für die Druckhöhe h.

$$P = K \frac{\gamma F v^2}{g}, \qquad (152) \quad 382$$

P Druck des Wassers oder Windes auf eine Fläche F, K ein aus Versuchen zu entnehmender Coefficient.

$$P' = P \sin \alpha, \qquad (154) \quad 384$$

$$P' = P \frac{(4 + \pi) \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}, \qquad (155) \quad 384$$

Formeln von Lössl und von Rayleigh für den Stossdruck P' beim schiefen Stosse, α der Neigungswinkel gegen die Wand, P der Druck beim rechtwinkligen Auftreffen.

$$P'' = P \sin^2 \alpha, \qquad (156) \quad 386$$

P'' die Componente des Stossdruckes in der Bewegungsrichtung des Windes oder des Wassers.

$$v = k \sqrt{r s}, \qquad (157) \quad 390$$

v Geschwindigkeit des Wassers in einem Flusse oder Canale, r der Profilradius, s das Gefäll, k eine aus Versuchen zu entnehmende Constante.

$$y - h + \frac{n^3 - m^3}{3 n^2} \left\{ \lg \frac{(y - n) \sqrt{h^2 + n h + n^2}}{(h - n) \sqrt{y^2 + n y + n^2}} + \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 h + n}{n \sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{2 y + n}{n \sqrt{3}} \right) \right\} = - s x, \qquad (159) \quad 395$$

Gleichung der Staucurve; darin ist h die Tiefe am Wehre und m und n bedeuten

$$m = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}}; \quad n = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 k^2 s}},$$

wobei Q die in der Zeiteinheit abzuführende Wassermenge,

Seite

b die Breite des Canals ist. Man hat auch $n = t$, d. h. gleich der Wassertiefe vor dem Stau.

$$z_0 = \frac{h}{2} + \frac{b^2}{3h} \qquad (161) \quad 407$$

z_0 die Höhe des Schwerpunktes eines Schiffes von rechteckigem Querschnitte über dem Boden, die nicht überschritten werden darf, wenn das Gleichgewicht nicht labil werden soll, h Tiefe der Eintauchung, b Hälfte der Schiffsbreite.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Holzmüller, Dr. **Gustav**, Direktor der Kgl. Gewerbeschule zu Hagen, die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. Zweiter Teil, enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektricität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit 237 Figuren, zahlreichen Übungsbeispielen und einem Anhange über Maſseinheiten. [XVII u. 440 S.] gr. 8. 1898. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

Jellett, John H., B. D., Senior Fellow an dem Trinity College zu Dublin, Präsident der Königlich Irischen Akademie, die Theorie der Reibung. Deutsch bearbeitet von Dr. J. Lüroth, Professor an der Universität zu Freiburg i. B., und A. Schepp, Premierlieutenant a. D. zu Wiesbaden. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. [X u. 239 S.] gr. 8. 1890. geh. n. ℳ 6.—

Kirchhoff, Dr. **Gustav**, weil. Professor der Physik an der Universität zu Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. 4 Bände. Mit Figuren im Text. gr. 8. geh. n. ℳ 39.—

I. Band. Mechanik. 4. Auflage, von Prof. Dr. W. Wien, Docent an der technischen Hochschule in Aachen. [X u. 464 S. 1897.] n. ℳ 13.—

Klein, Felix, und **A. Sommerfeld**, über die Theorie des Kreisels. 3 Hefte. gr. 8. geh.

Heft I. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie. [IV u. 196 S.] 1897. n. ℳ 5.60.

— II. Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. [IV u. 315 S.] 1898. n. ℳ 10.—

— III. [In Vorbereitung.]

Klein, Prof. Dr. **Hermann**, Professor der Mathematik und Physik am Vitzthum'schen Gymnasium zu Dresden, die Principien der Mechanik historisch und kritisch dargestellt. Eine von der philosophischen Honoren-Facultät zu Göttingen gekrönte Preisschrift. [VIII u. 120 S.] gr. 8. 1872. geh. n. ℳ 2.40.

Kohlrausch, Dr. **F.**, Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, Leitfaden der praktischen Physik, mit einem Anhange: das absolute Maass-System. Mit in den Text gedruckten Figuren. Achte, vermehrte Auflage. [XXIV u. 492 S.] gr. 8. 1896. In biegsamen Leinwandband geb. n. ℳ 7.—

Kröhnke, G. H. A., Königlich Preuſsischer Regierungs- und Baurat in Frankfurt a/O., Handbuch zum Abstecken von Curven auf Eisenbahn- und Wegelinien. Für alle vorkommenden Winkel und Radien aufs sorgfältigste berechnet. Dreizehnte Aufl. Mit einer Figurentafel. [VIII u. 164 S.] 16. 1896. In Leinwand geb. n. ℳ 1.80.

Rausenberger, Dr. **Otto,** Lehrbuch der analytischen Mechanik. Mit Figuren im Text. Zweite, wohlfeile Ausgabe. 2 Bände in einem Bande. I. Band. Mechanik der materiellen Punkte. [VIII u. 318 S.] II. Band. Mechanik der zusammenhängenden Körper. [VI u. 336 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 8.—

Routh, Edward John, Sc. D., LL. D., F. R. S., etc.; Ehrenmitglied von Peterhouse, Cambridge; Mitglied des Senats der Universität London, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp, Premierlieutenant a. D. zu Wiesbaden. Mit einem Vorwort von Professor Dr. Felix Klein zu Göttingen. gr. 8. 1898. In Leinw. geb. n. ℳ 24.—

Einzeln:

I. Band: Die Elemente. Mit 57 Figuren im Text. [XII u. 472 S.] n. ℳ 10.—

II. (Schlufs-)Band: Die höhere Dynamik. Mit 38 Figuren im Text. [X u. 544 S.] n. ℳ 14.—

Wüllner, Dr. **Adolph,** Geheimer Regierungsrat und Professor der Experimentalphysik an der Königlichen Technischen Hochschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. In 4 Bänden. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 940 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. gr. 8. geh. n. ℳ 56.—, in Hfzbd ℳ 64.25.

Einzeln:

I. Band. Allgemeine Physik und Akustik. Mit 321 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [X u. 1000 S.] 1895. n. ℳ 12.—, in Hfzbd ℳ 14.—.

II. — Die Lehre von der Wärme. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XI u. 936 S.] 1896. n. ℳ 12.—, in Hfzbd ℳ 14.—.

III. — Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektricität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. Mit 341 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XV u. 1415 S.] 1897. n. ℳ 18.—, in Hfzbd ℳ 20.25.

IV. — Die Lehre von der Strahlung. Mit 147 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XII u. 1042 S.] 1899. n. ℳ 14.—, in Hfzbd ℳ 16.—.

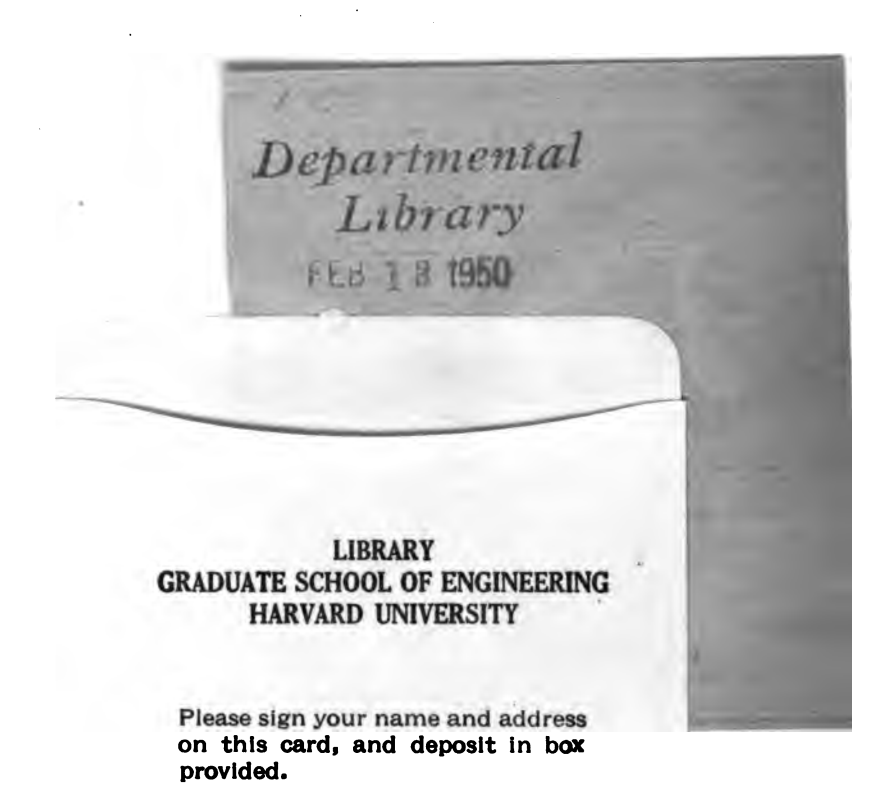
——— Compendium der Physik für Studierende an Universitäten und technischen Hochschulen. Zwei Bände. Mit zahlreichen Abbildungen im Text und einer farbigen Spectraltafel. gr. 8. geh. 1879. Beide Bände zusammen n. ℳ 19.20.

Einzeln jeder Band n. ℳ 9.60.

I. Band. Allgemeine Physik, Akustik u. Optik. [VIII u. 659 S.]

II. — Die Lehre von der Wärme, dem Magnetismus und der Elektricität. [VIII u. 703 S.]

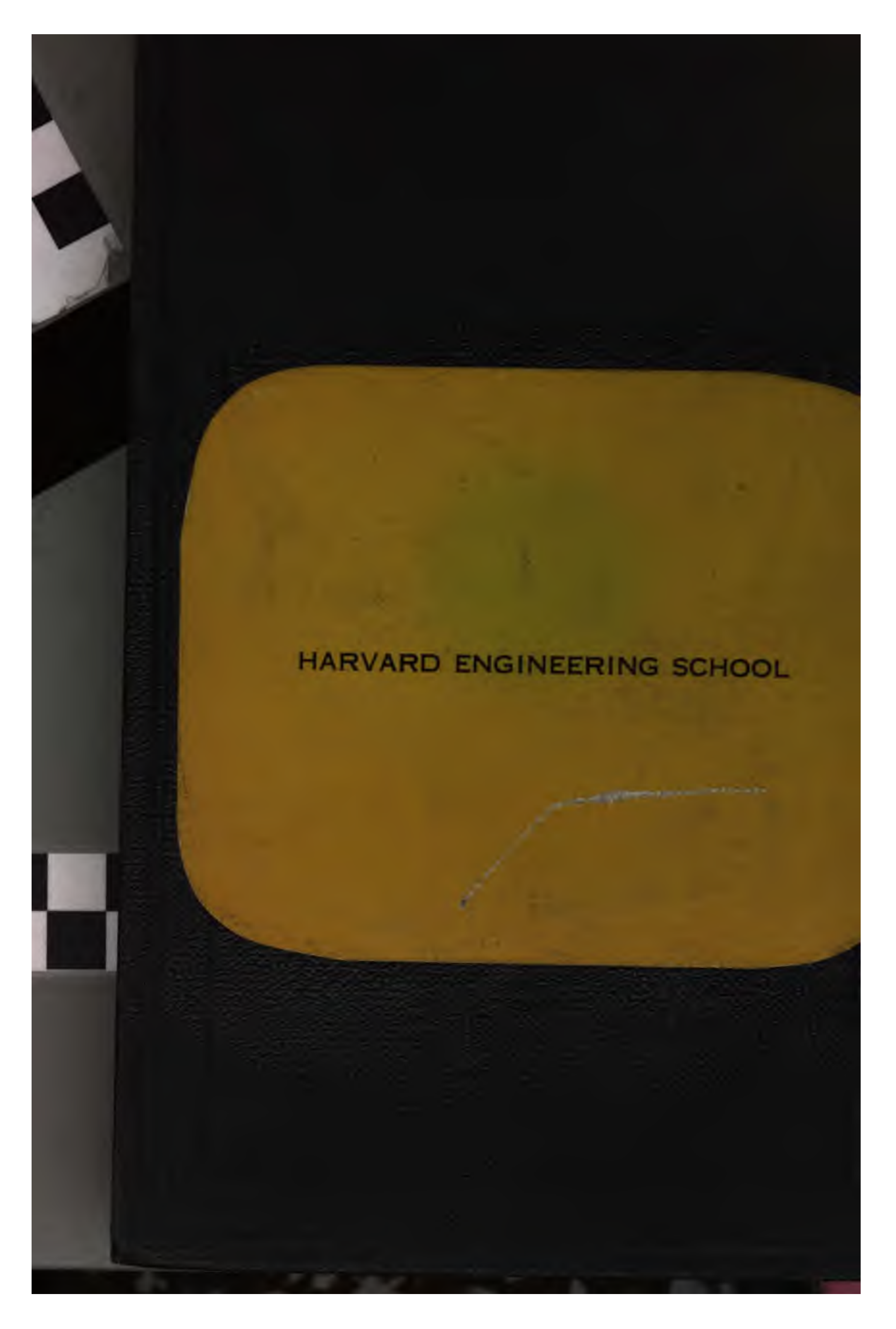




Please sign your name and address on this card, and deposit in box provided.

This book may be kept

ONE WEEK


HARVARD ENGINEERING SCHOOL